

A mis padres, por confiar en mí y en mis decisiones.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Resumen | IX |
| Extended abstract | XI |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. El cáncer de mama y su detección | 1 |
| 1.2. La localización por aguja | 4 |
| 2. Estado del Arte | 9 |
| 2.1. El método de los elementos finitos aplicado al modelado de las deformaciones del tejido mamario | 9 |
| 2.1.1. Propiedades mecánicas del tejido mamario | 9 |
| 2.1.2. Modelos en elementos finitos | 10 |
| 2.2. Modelado en tiempo real de las deformaciones del tejido mamario utilizando redes neuronales artificiales | 12 |
| 3. Desarrollo teórico del método de los elementos finitos | 15 |
| 3.1. Método de los Elementos Finitos | 15 |
| 3.1.1. FEM: La ecuación diferencial elíptica unidimensional | 15 |
| 3.1.2. La forma débil de la EDP lineal, elíptica y unidimensional. | 17 |
| 3.1.3. La formulación débil finito-dimensional. | 20 |
| 3.1.4. La formulación débil matriz-vectorial. | 24 |
| 3.1.5. Integración numérica mediante cuadratura de Gauss | 30 |
| 3.2. FEM: el paso al caso tridimensional | 31 |
| 3.2.1. La EDP lineal elíptica tridimensional | 31 |
| 3.2.2. Formulación débil de la ecuación de elasticidad lineal en el caso tridimensional | 33 |
| 3.2.3. Forma débil finito-dimensional en el caso tridimensional | 33 |
| 4. Análisis de Objetivos y metodología | 39 |
| 4.1. Objetivos | 39 |
| 4.1.1. Preprocesamiento de los datos | 39 |
| 4.1.2. Creación de unos datos ideales de experimentación | 39 |
| 4.1.3. Desarrollo de un módulo de simulación del efecto de la gravedad mediante un modelo de elementos finitos | 40 |
| 4.1.4. Visualización de los resultados | 40 |
| 4.2. Metodología | 40 |
| 4.3. Herramientas utilizadas | 40 |

| | |
|---|-----------|
| 5. Diseño y resolución de la solución | 43 |
| 5.1. Recopilación de datos médicos | 43 |
| 5.2. Modelado 3D | 43 |
| 5.3. Preprocesamiento | 43 |
| 5.4. Simulación física | 47 |
| 5.4.1. Generación del modelo | 47 |
| 5.4.2. Definición de las condiciones de frontera | 48 |
| 5.4.3. Inicialización de variables | 48 |
| 5.4.4. Cálculo de Klocal y Flocal y ensamblaje de K y F | 48 |
| 5.4.5. Solución | 49 |
| 5.4.6. Generar el archivo de salida | 49 |
| 5.5. Análisis de los resultados obtenidos | 50 |
| 5.5.1. Resultados utilizando el modelo idealizado | 50 |
| 5.5.2. Resultados utilizando el modelo de la mamografía | 54 |
| 6. Conclusiones y vías futuras | 57 |
| 6.1. Conclusiones | 57 |
| 6.2. Vías futuras | 58 |
| Bibliografía | 59 |
| A. Tabla resumen de la cuadratura de Gauss | 63 |

Índice de figuras

| | | |
|-------|--|------|
| 1. | Workflow of the project. | XIII |
| 1.1. | Mamografía en la que se observa un carcinoma ductal invasivo (señalado por la flecha blanca). | 3 |
| 1.2. | Mamografías en vista craneocaudal (A) y mediolateral oblicua (B) de ambos senos, derecho (RCC, RMLO) e izquierdo (LCC, LMLO). | 3 |
| 1.3. | Xerorradiografía auxiliar a un proceso de localización por aguja. | 5 |
| 1.4. | Localización por aguja usando el enfoque del hilo de alambre con un gancho en la punta. | 6 |
| 2.1. | Resultados del modelo en elementos finitos. | 11 |
| 2.2. | Modelado de grandes deformaciones con redes neuronales artificiales. | 13 |
| 2.3. | Modelado de pequeñas deformaciones con redes neuronales artificiales. | 13 |
| 2.4. | Resultados del modelo de redes neuronales artificiales. | 14 |
| 3.1. | Diagrama de la configuración del problema elíptico unidimensional. | 16 |
| 3.2. | Partición de Ω en elementos finitos. | 21 |
| 3.3. | Mapeo del dominio bi-unidad a un elemento finito. | 22 |
| 3.4. | Mapeo de las funciones base del dominio bi-unidad a un elemento. | 22 |
| 3.5. | Base global de polinomios lineales a trozos. | 23 |
| 3.6. | Ejemplo de la elasticidad 1D. Solución exacta vs. solución aproximada. | 30 |
| 3.7. | Dominio tridimensional. | 32 |
| 3.8. | Dominio tridimensional, fronteras de Dirichlet (rojo) y de Neumann (azul). | 32 |
| 3.9. | Dominio tridimensional, partición en elementos finitos. | 34 |
| 3.10. | Numeración local de los elementos finitos tridimensionales. | 34 |
| 3.11. | Mapeo del dominio biunidad a un elemento finito tridimensional. | 35 |
| 3.12. | Mapeo entre las caras del dominio biunidad a las de un elemento finito de la frontera. | 37 |
| 5.1. | Flujo de trabajo del proyecto. | 44 |
| 5.2. | Proceso de separación de una mama a partir del STL inicial. | 45 |
| 5.3. | Objeto que representa la mama derecha de la mamografía proporcionada por Cella Medical Solutions, en formato STL. | 46 |
| 5.4. | Objeto que representa el volumen interior de la mama derecha de la mamografía, en formato VTK. | 47 |
| 5.5. | Semiesfera que usamos para realizar un análisis de la influencia de los parámetros. | 48 |
| 5.6. | Simulación con el dominio ideal, $E = 18kPa$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso. | 51 |
| 5.7. | Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0.48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso. | 52 |

| | |
|--|----|
| 5.8. Simulación con el dominio ideal, $E = 18kPa$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso. | 53 |
| 5.9. Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0'48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso. | 53 |
| 5.10. Simulación con el modelo de la mama, $E = 20kPa$, $\nu = 0'48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso. | 54 |
| 5.11. Simulación con el modelo de la mama, $E = 20kPa$, $\nu = 0'48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada boca arriba, perpendicular al torso. | 55 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 1.1. Lesiones de pecho que requieren escisión quirúrgica. | 4 |
| 2.1. Resultados para el módulo de Young en cada tejido bajo distintas condiciones. | 10 |
| A.1. Tabla de valores para aplicar cuadratura de Gauss. | 63 |

Índice de listados de códigos

| | |
|--|----|
| 5.1. Esqueleto básico del formato STL. | 45 |
| 5.2. Pseudocódigo del programa que crea un volumen en formato VTK a partir de una superficie cerrada en formato STL. | 46 |
| 5.3. Pseudocódigo del módulo de simulación. | 47 |
| 5.4. Fragmento de código para obtener Klocal, Flocal, K y F. | 48 |

Resumen

Es bien conocido el hecho de que la computación hace ya varias décadas que dejó de ser una rama de estudio independiente, para pasar a ser un campo multidisciplinar, en el que sus avances se aplican en todo tipo de campos, desde la física de partículas hasta el análisis financiero, pasando por la automatización agraria y, por supuesto, la medicina. La aplicación en el campo de la medicina presenta un especial interés, ya que es un campo donde los avances repercuten de forma directa en la calidad de vida de las personas. En este trabajo de fin de grado vamos a explorar una interesantísima aplicación de la computación y las matemáticas en la medicina, en colaboración con la empresa autóctona de la Región de Murcia, Cella Medical Solutions.

El cáncer de mama se presenta como el segundo cáncer más detectado entre las mujeres, así como el segundo cáncer más letal entre ellas. Es, por tanto, de alto interés médico y social desarrollar buenos métodos de detección y tratamiento del mismo. La técnica más ampliamente utilizada hoy en día es la mamografía, que es un escáner de rayos X que propicia una baja dosis de radiación a la paciente. Para realizarse la mamografía, la mujer debe encontrarse de pie o sentada, de cara a la máquina mamográfica. En esta posición, unas planchas de vidrio comprimen el pecho de la mujer y se efectúa la imagen. Esta se hace desde diversos ángulos para crear un modelo tridimensional de los componentes de la mama, desde grasa y tejido mamario, hasta un posible tumor. Una vez detectado un tejido anómalo, debe procederse a su biopsia, para determinar su malignidad, y una posterior extracción. Este procedimiento pasa por que la mujer cambie de posición, desde la máquina mamográfica, de pie o sentada, hasta la cama de operaciones, donde está acostada boca arriba. Dada la gran elasticidad del tejido mamario, este sufre severas deformaciones, y no siempre es sencillo localizar el tumor a partir de la mamografía.

Para solventar este problema, tradicionalmente se realiza la localización por aguja, en la que el médico, previamente a la biopsia y/o la cirugía, introduce una pequeña aguja hasta el tumor, anclando entonces un hilo de alambre con un arpón a este y retirando la aguja, de forma que para la posterior operación, el doctor únicamente debe seguir el hilo hasta llegar al área afectada. Esto debe hacerse tratando de minimizar el tejido sano dañado, para lo cual es clave la pericia del profesional, y esta no siempre es suficiente por sí sola.

Así, en este trabajo estudiamos un modelo computacional capaz de proporcionar asistencia en esta delicada operación, con el objetivo de facilitar la localización de los tumores a partir de la mamografía, y mejorando de esta manera la vida de las mujeres que, desgraciadamente, padecen esta enfermedad.

El modelo estudiado será una simplificación del presentado en Azar et al. 2000 [AMS00]. Este es un modelo en elementos finitos de las deformaciones del tejido mamario, con resultados muy prometedores. Nuestro modelo también nos proporcionará, como veremos, resultados alentadores, a partir de los cuales consideramos que Cella Medical Solutions puede continuar un proceso de mejora,

y llegar a alcanzar resultados realmente útiles para los profesionales médicos.

Extended abstract

Cella Medical Solutions is a Murcian firm focused on the application of computing and technology to the medical field. More specifically, they have developed programs that can help medical professionals in the operations' room. They have developed programs to help in the fields of:

- Surgical planning: planning of a surgical operation, regarding possible techniques to be used, as well as specific details of the surgery, such as determining the best point for making a cut or introducing a needle, in order to minimize risk and harm to healthy tissue.
- Patient-based 3D modeling of the different organs: when a scanner of an organ is made by the health center, Cella offers the service of 3D reconstruction of the organs involved, so they can be visualized and analyzed almost as if the organs were out of the patients body.
- Surgical guidance: real-time applications to help the surgeons during a procedure.

They are interested in developing a computational technique to help to minimize the harm caused to healthy tissue in the breast when treating a tumor that has been previously detected in a mammogram. This study is then focused on the development of a new tool for surgical planning.

According to [Her20], breast cancer is the second most diagnosed cancer among women, only below skin cancer, as well as the second most deadly type of cancer, with lung cancer being the most lethal cancer for women. Thus, it is an important medical concern to develop appropriate methods to detect breast cancer, as well as to design procedures to treat this disease. The best known and most used technique for detecting breast cancer nowadays is the mammogram, a low-dose X-ray scanner that entails little radioactivity exposure for the patient. The machine used to make a mammogram is called a mammographer, and to use it, the woman must remain standing up or sitting down in front of the mammographer. When the patient is positioned, there are two metal plates that are used to compress each breast, holding them tight and incrementing the precision of the scanner. Several images from different angles are taken in this manner to be able to later reconstruct a 3D model of the breast and its constitutive tissues, being these mainly skin, fat, mammary glands, and possibly tumorous tissue. This technique has high sensitivity and specificity. However, it has some drawbacks, for example, it is not suitable for women with large breasts as the compression of the breast is necessary to obtain a clear image. It is also not suitable for women with implants as the image obtained is not clear enough. With this procedure, after detecting an anomalous tissue in a breast, a biopsy must be held in order to determine its malignancy. Here is where the procedure starts to present severe difficulties. As the breasts are especially flexible, what is seen in the mammogram is highly dependent on the breast position, and may greatly differ from what the breast position is in the biopsy. This can lead to misdiagnosis, as the biopsy may be made in the wrong area, or even to mistreatment, as the tumorous tissue may be removed while leaving the cancerous tissue behind.

Breast cancer can be treated in several ways, the most common being surgery, radiation

therapy, chemotherapy, and hormone therapy. There are multiple types of surgeries, being the most common the mastectomy, which consists of removing the whole breast, or lumpectomy, which consists of removing the tumorous tissue, leaving the healthy tissue intact. In both cases, either the whole breast or the tumorous tissue must be removed without harming the surrounding tissue, which is especially difficult if the breast tissue is dense.

In order to minimize the harm to healthy tissue, the process of biopsy is aided with the imaging machinery, and the technique used nowadays involves the insertion of a harpoon-shaped wire in the tumorous tissue, to make it easier for the surgeon to find. Nonetheless, the expertise of the doctors is a key factor in this procedure, and finding the path to the tumor that minimizes harm is not a trivial task. With this in mind, the aim of our work is to study finite element methods that can model the deformations of the breast tissue, allowing the doctors to estimate better the position of the tumor in the operating bed from its position in the mammogram. The proposed model will be a simplified finite element model, as we will consider the breast as composed only of fat and we will not model the non-linear elastic properties of the breast. However, the aim is to develop a model that will still be able to capture the most relevant features of breast deformation.

In the first and second chapters, we will introduce this matter in a more profound way, and we will research its state of the art. We will explain in detail how a mammogram works, as well as the procedure of localization of the tumor, its biopsy and how its extraction is done, so the reader will be able to deeply understand the problem that we are trying to solve. We will then see the first finite element model of breast deformations, developed in [AMS00], which led to really good results, although the necessary computing time made it unsuitable for real-time applications. Also, we will see how other authors developed different models of this kind, but without significant improvements in the process. For example, in the Spanish study [Pal+08], the authors discovered that the most important factor in the breast deformation is the proportion between glandular and fat tissue in the breast and in [Llo+12], the authors added to the model the thickness of the skin, leading to an improvement in precision, but with the same timing problems. The most significant contribution in this aspect was published the present year, in [WK22]. In this study, the authors used two neural networks to predict the movement of the tissues, and they achieved great performance, obtaining low errors with computing times of less than a second, which makes this approach promising for its possible use in real-time applications.

In the third chapter, we will mathematically develop the ideas behind the finite element method, starting with the one-dimensional elliptic equation, which is the most understandable, and of which we will compute a basic example. To finish this chapter, we will explain the elastic three-dimensional elastic equation. The explanation will be done in a formal manner, but some basic mathematical concepts and some physics concepts that are out of our expertise knowledge, as well as out of the scope of this work are disregarded. In these cases, suitable references are provided, so that the interested reader can delve into these concepts from authors that explain them better than we would.

As for the fourth chapter, we will state our main objectives, which will be:

- Preprocessing of the data.
- Using ideal data to model a breast (a semisphere).
- Developing a C++ module that can model the application of gravity to a certain three-dimensional object using the finite element method.
- Visualize the obtained results.

Also, we will explain the available software we have used, among which we can highlight the deal.II library, used to develop the finite element model in C++ and freeCAD, which we use to transform the mammogram that Cella Medical Solutions gave to us a suitable format for our purposes. The workflow of the presented process is as in Figure 1, where we can see the relationships between all of the proposed objectives, as well as the relative timing of each step of the process.

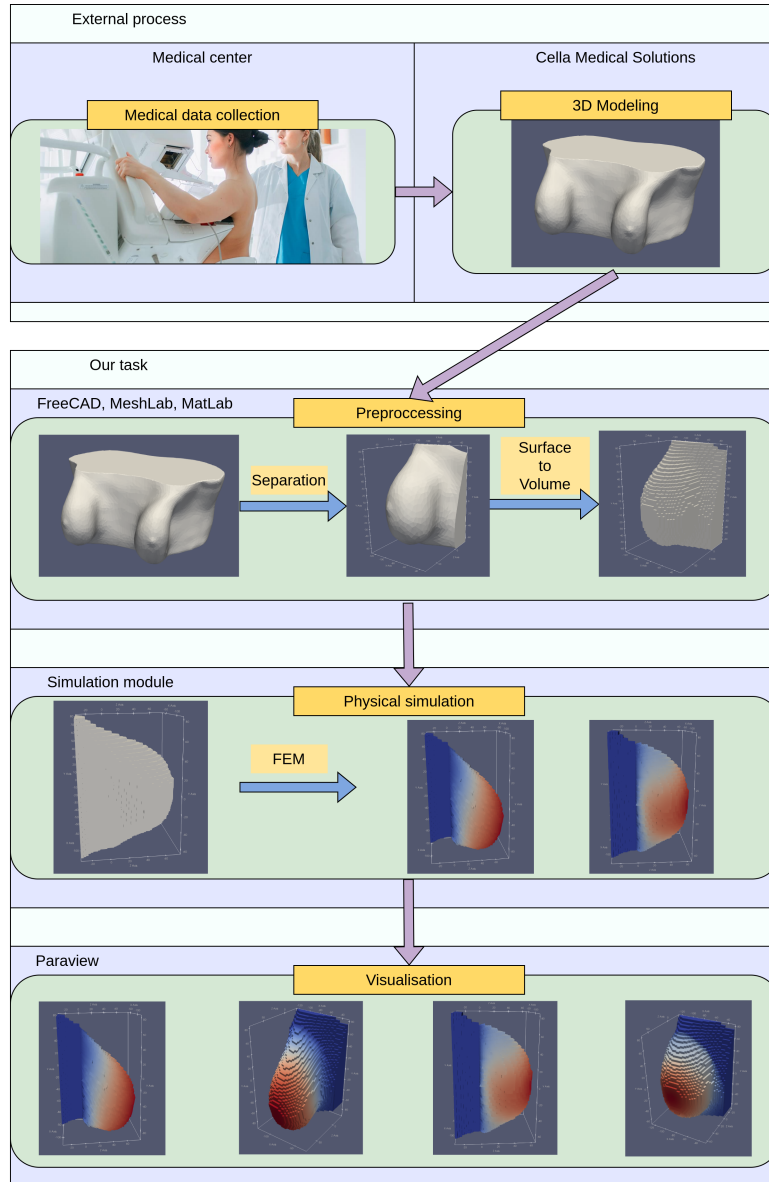


Figura 1: Workflow of the project.

In the fifth chapter, we will explain how we fulfilled each objective. We will start with the preprocessing of the data, and we will give a detailed description of how we transformed the mammogram into a file suitable for our purposes. As the mammogram was given as an STL file representing the triangulated surface of each tissue, we will just consider the one that represents the fat, we will remove all the surface but the part representing the right breast and we will develop a Matlab program that is able to transform a closed surface represented by an STL into a 3D solid represented in VTK format, which is the one deal.II library can properly work with.

Secondly, we will define an experimental ideal domain. We will use a semisphere to represent

an ideal breast and we will use it to test how the model behaves when we vary each of the parameters that compose it. That is the Young modulus and the Poissons ratio. We will check to which extent the model is able to capture the expected behavior for each of the pairs (E, ν) .

Thirdly, we will explain how we developed the module that we used to compute the deformation of the breast under the influence of gravity using the deal.II library. At this point, we will explain the principal functioning of the program, which will be focused on programmatically representing the material explained in chapter 3. We will how to represent the three-dimensional body with the deal.II library, how to define the boundary conditions, how to compute and assemble the different components of the finite element model and how to get the final solution and its visualization.

Lastly, we will explain how we visualized the results. As the results are given as files in VTK format, we used ParaView, a free visualization tool, to open them and produce the corresponding graphics. We will use this tool to visualize the deformation that was computed with the model.

To finish the chapter, we show the obtained results and analyze them. We will check to what extent the model behaves as expected. We will start with the results obtained in the analysis of the variations of the parameters using the ideal domain and applying the gravity force in two directions: first, simulating that the woman is standing up, so the gravity force is parallel to the chest wall, and later simulating that the woman is lying face up, so that the gravity force points out in the perpendicular direction to the chest wall. We will observe that the model can capture the effect of the gravity in each direction in the given body, and also that the behavior of the Young modulus corresponds to its theoretical behavior, that is, the higher the Young module is, the stiffer the material is, and less deformation is obtained. Also, we will see how using too high values for the Poissons ratio leads to aberrant results and may be discarded. Finally, we apply the model with the parameters defined in [DBS17] and [Kro+98] to the preprocessed real data. We will see promising results, as the influence of gravity in the studied bodies is correctly captured by the model, so we think it can be improved, leading to great results.

The conclusion of this work is given in the sixth chapter, where we explain what we have done, what we have learned, and what we think about the model. We will also explain the possible next steps for this project, which will mainly focus in the improvement of the representation of the mammogram and the improvement of the model, making it able to represent the non-linear properties of the material and to reduce its computing time. From this point, we believe that Cella Medical Solutions has enough information and material to continue with this research line and that they will be able to develop more accurate models and, using the newer researchals mentioned before, they could even dive into the task of a real time deformation model of the breast.

We are strongly proud of the work done, as we present a promising model that could potentially help doctors mitigate harm made when treating breast cancer, which can lead to an improvement of the life of the women who suffer from this disease. Also, we expect to see further developments in this field and we believe that the technique of localization with needle will one day be a thing of the past, and that it will be replaced by more accurate and less harmful methods.

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo fue propuesto por Miguel Rodríguez, CTO Dtor. de Tecnología e Innovación de Cella Medical Solutions, tras una serie de reuniones en las que discutimos diferentes líneas a seguir. Finalmente, elegimos esta propuesta porque era, dada su alta componente matemática y el propio interés del tema, la que más se ajustaba a lo que yo buscaba. Cella Medical Solutions es una empresa murciana dedicada al desarrollo de aplicaciones informáticas en el ámbito de la medicina. Su trabajo está centrado en el modelado tridimensional de los distintos órganos del cuerpo humano, así como del proceso de cirugía. Presentan servicios de:

- **Planificación quirúrgica:** consiste en la elaboración de las posibles estrategias a seguir en una operación que ha de realizarse en el futuro.
- **Simulación quirúrgica:** se proporciona al médico un entorno virtual en el que puede practicar una operación. Puede utilizarse para testear diversas opciones y ayudar así también a la planificación de la intervención.
- **Guiado quirúrgico:** este último es un servicio en tiempo real, que trata de ayudar al médico en el momento de la intervención, mediante el modelado interno de los órganos, la imagen en tiempo real y el modelado de las deformaciones de los distintos tejidos.

Dentro de la planificación quirúrgica, hay muchos aspectos que pueden considerarse, como pueden ser la minimización del riesgo, la minimización del daño causado a tejidos sanos o la elección de la técnica más apropiada a utilizar entre un conjunto de opciones, entre otros muchos. Cada uno de estos aspectos, debe estudiarse detalladamente en cada caso concreto, aunque es posible, y beneficioso, el desarrollo de procesos comunes a los análisis particulares.

La empresa está interesada en el desarrollo de un proceso de minimización del daño causado a tejidos sanos, en el caso particular del cáncer de mama. Como vamos a ver, este caso es bastante complejo, ya que el método que se ha utilizado durante los últimos veinte años para esta tarea reviste una importante dificultad matemática y conceptual.

1.1. El cáncer de mama y su detección

La detección del cáncer de mama tiene una importancia capital para poder tratar a las mujeres que sufren de esta patología. Según se explica en [Her20], libro de referencia en el que nos vamos a apoyar para explicar el funcionamiento de las mamografías, el cáncer de mama es el segundo tipo

de cáncer más diagnosticado en mujeres, detrás del cáncer de piel, y también la segunda causa de muerte por cáncer entre las mujeres, solo por detrás del cáncer de pulmón. Según este mismo autor, la técnica que mejor funciona hoy en día es la mamografía, que es un escáner de rayos X con baja dosis de radiación para la paciente. Más concretamente, la técnica se realiza con una maquinaria específica capaz de generar rayos X de baja energía, junto con un instrumento que comprime el pecho para aumentar la calidad de las imágenes al reducir el grosor del tejido que deben atravesar los rayos X, reduciendo asimismo la dispersión de la radiación y su dosis y manteniendo el tejido estático en un lugar fijo. Hoy en día el proceso de imagen es digitalizado, en contraste con técnicas más antiguas, como la técnica de introducción de medios de contraste en los conductos galactóforos presentada por N. Frederick Hicken en [Hic37], donde se acuñó el término *mamografía* (*mammogram* en inglés original).

Las mamografías se dividen en dos tipos, aunque muy relacionados entre ellos:

- **Mamografía de observación:** su objetivo es detectar cáncer de mama en pacientes asintomáticas.
- **Mamografía de diagnóstico:** estas se usan en pacientes que presentan síntomas del cáncer en el pecho, como dolor o aparición de bultos, o en aquellas mujeres que requieren un examen detenido tras haber detectado posibles anomalías en una mamografía de observación. También se realizan en mujeres que han padecido cáncer de mama previamente o que tienen implantes de pecho.

La **tomosíntesis digital** o mamografía 3D es un tipo de mamografía desarrollado recientemente¹, consistente en la toma de imágenes desde diferentes ángulos, que permiten tomar finas secciones del pecho, que luego son ensambladas, formando una imagen tridimensional.

La sensibilidad² de una mamografía para detectar anomalías en el pecho depende inversamente de la densidad del tejido de la mama, es decir, que cuanto mayor es esta densidad, menor es la sensibilidad. Esto se debe a que la grasa se ve de color grisáceo, mientras que los signos anómalos que pueden ser tejido cancerígeno se verán blanquecinos. Esto hace que, al aumentar la densidad, el tejido se enblanquezca (deja pasar menos rayos), dificultando su distinción del tejido maligno. En la Figura 1.1 podemos observar la coloración de los distintos tejidos que se ve en una mamografía. La flecha blanca señala un carcinoma, que aparece en una coloración más blanca que el resto de la imagen, debido a su mayor densidad, como se ha explicado. El resto de la imagen es más oscura en general, aunque algunos vasos sanguíneos pueden verse con un tono más blanco.

Una mamografía de observación consiste en dos vistas de cada mama, la vista craneocaudal (CC) y la vista mediolateral oblicua (MLO). Los nombres se derivan de la dirección en la que los rayos atraviesan el tejido desde la fuente hasta el detector. Por tanto, como puede observarse en la Figura 1.2, para la vista craneocaudal, la fuente se sitúa sobre el pecho y el receptor bajo el mismo; y para la vista mediolateral oblicua debe presionarse el pecho hacia arriba, separándolo del pectoral, y la imagen se toma desde el lateral.

Respecto a las mamografías diagnósticas, si se han encontrado signos de un posible cáncer de mama, se realizan vistas desde múltiples ángulos y con diferentes grados de compresión de las mamas, para poder contrastar las distintas vistas y aminorar los errores.

El objetivo último de este proceso es detectar, en aquellos casos en los que exista, el tejido cancerígeno, para poder eliminarlo de alguna forma. Normalmente, las anomalías encontradas en las

¹Uno de los primeros estudios que se realizaron sobre su eficacia y funcionamiento es [Fri+14].

²La sensibilidad es la capacidad de diagnosticar la enfermedad cuando el paciente la padece.

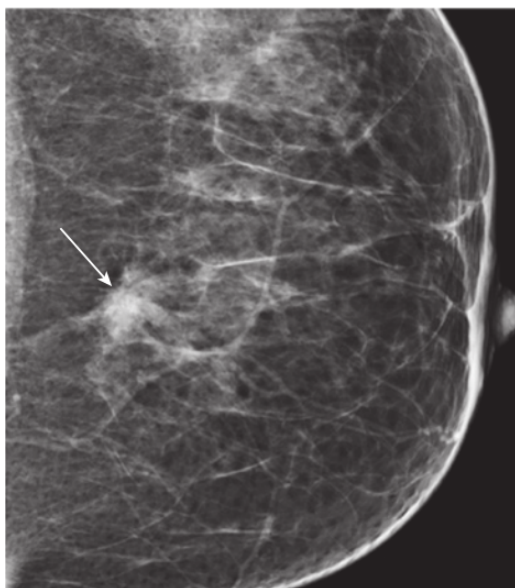


Figura 1.1: Mamografía en la que se observa un carcinoma ductal invasivo (señalado por la flecha blanca).

Fuente: [Her20]

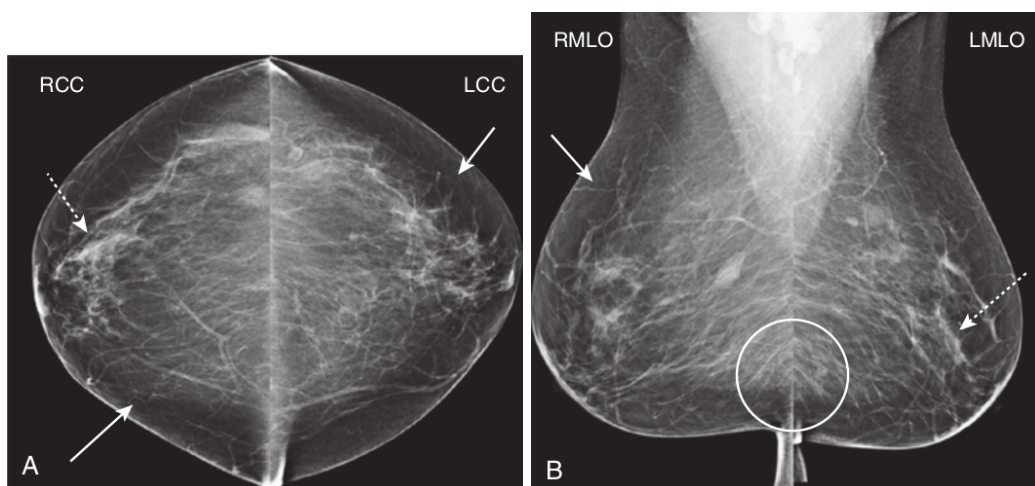


Figura 1.2: Mamografías en vista craneocaudal (A) y mediolateral oblicua (B) de ambos senos, derecho (RCC, RMLO) e izquierdo (LCC, LMLO).

Fuente: [Her20].

mamas se tratan con procedimientos percutáneos³, siendo los más típicos los siguientes:

- **Drenaje de quiste:** esta técnica se realiza con apoyo de imagen por ultrasonidos como guía. Consiste en absorber un fluido anómalo encontrado en la mama.
- **Biopsia estereotáctica:** técnica normalmente utilizada para tratar calcificaciones, ya que la mayoría de tejidos blandos anómalos pueden ser extraídos con una biopsia por ultrasonido. En este caso se usan rayos X para obtener imágenes de la lesión en ángulos distanciados 30 grados. Entonces, mediante un programa se determina cuánto se desplaza la lesión en las imágenes, permitiendo la determinación de la localización y la profundidad de la lesión. Tras la biopsia, el radiólogo determina si la patología es concordante, en cuyo caso la paciente volverá al protocolo de observación, o discordante, de manera que se deberá realizar otra biopsia o pasar a la escisión quirúrgica.
- **Escisión quirúrgica:** algunas lesiones (las recogidas en la Tabla 1.1) requieren una localización por aguja y una posterior escisión quirúrgica. El objetivo de la localización por aguja es guiar al cirujano hasta la lesión para que pueda extraerla. Normalmente intenta hacerse minimizando la distancia que la aguja recorre desde la piel hasta la lesión y se suele realizar una radiografía post-quirúrgica para asegurar que el tejido anómalo se ha eliminado.

| Lesiones de pecho que requieren escisión quirúrgica |
|---|
| Carcinoma invasivo |
| Carcinoma ductal in situ |
| Hiperplasia ductal atípica |
| Atipia epitelial plana |
| Fibroadenoma celular |
| Lesiones fibroepiteliales |

Tabla 1.1: Lesiones de pecho que requieren escisión quirúrgica.

Fuente: [Her20].

Es en esta última modalidad en la que el presente trabajo quiere profundizar, ya que es en la que tiene cabida un modelo de deformación del tejido mamario que podría ser de utilidad para minimizar el daño producido al tejido sano en el proceso de localización. No obstante, el área donde tendrá sentido el estudio no será únicamente el caso en el que se conoce previamente que la lesión es maligna, sino también el caso en el que este proceso se lleva a cabo mediante una biopsia por localización con aguja. Así, vamos a dedicar la siguiente sección a este proceso.

1.2. La localización por aguja

Como se explica en [ESG76], el desarrollo de las mamografías supuso un aumento significativo en la capacidad de detección de lesiones en las mamas, especialmente aquellas lesiones no palpables, que anteriormente eran prácticamente indetectables. Este aumento en la capacidad de detección debía acompañarse de una consecuente mejora en los procesos de determinación de la malignidad de la lesión, y de su extracción, repercutiendo positivamente en el tratamiento de las lesiones mamarias. Estos mismos autores explican las técnicas desarrolladas hasta ese entonces con tal cometido, recalando que eran técnicas o bien poco precisas, o bien demasiado invasivas. De esta forma, desarrollaron un nuevo método que reunía las siguientes características:

³Es decir, procedimientos que atraviesan la piel del paciente.

- Precisión: de forma que se minimice la necesidad de realizar sucesivas biopsias.
- La creación de un sistema de guiado, inherente a la propia técnica, que permita la cirugía, minimizando el daño a tejidos sanos y el tiempo de anestesia de la paciente.
- Versatilidad: se buscaba que el método pudiese partir de distintos tipos de escáneres previos, como una mamografía, por ejemplo.
- Producción de un tinte excretado fisiológicamente, que no perjudica sucesivos descubrimientos mamográficos.
- Capacidad de comprimir los pechos tanto en vista craneocaudal como vista mediolateral.

Le técnica consistía en los siguientes pasos:

1. En posición sentada, de forma que la asistencia de la máquina de visionado pueda ser utilizada, se administra anestesia local a la paciente, para mejorar su colaboración. No obstante, no es estrictamente necesario, ya que el proceso no es muy doloroso.
2. Se inserta una aguja de 22 gauge⁴ en el área sospechosa, a la profundidad estimada de la lesión.
3. Con la asistencia del sistema de visionado, se reposiciona la aguja hasta dar con el área de la lesión. En la Figura 1.3 puede observarse la vista de la asistencia al proceso mediante xerorradiografía, una técnica de rayos X que no es ampliamente utilizada hoy en día.



Figura 1.3: Xerorradiografía auxiliar a un proceso de localización por aguja.

Fuente: [ESG76]

4. Se inyecta tinte de azul de metileno en el área de la lesión en cierta cantidad.
5. Durante la extracción de la aguja, se va inyectando más tinte de azul de metileno, de forma que quede un camino azul fácilmente rastreable desde la piel hasta la lesión.

⁴Un gauge es una medida aplicada a las agujas. La cantidad de gauges se refiere a cuántas agujas de ese tamaño caben en un cm^3 . En este caso, una aguja de 22 gauges tiene 0.759 mm de grosor.

Tras esto, la lesión está localizada y realizar una biopsia para determinar su malignidad es sencillo.

Aunque esta es la técnica originalmente desarrollada, ha sufrido ligeras modificaciones a lo largo del tiempo. Por ejemplo, en [Thr+74] se describe una técnica similar, aunque en esta ocasión utilizan una aguja de 25 gauge (0.455 mm), que atraviesa la piel sin aplicación de anestesia en la región de la lesión. Para ello, estiman la posición de la lesión mediante la visualización de dos vistas distintas de la mamografía, e introducen la punta de la aguja apuntando en dirección al área afectada y se introduce hasta aproximadamente el centro de la mama. En este punto se apoyan en una nueva mamografía, para estudiar la posición de la aguja respecto a la lesión. Si la aguja está en la zona correcta, o en un lugar cercano, se fija la aguja en esa posición, hasta el momento de la biopsia, en el que se usa la pequeña aguja como guía hacia la lesión. Un par de años después, en [FHS76], los autores introdujeron una nueva mejora al método, en el que dentro de la fina aguja se coloca un fino hilo de alambre con un pequeño gancho desplegable, que permite una mejor inserción una vez posicionado correctamente, así como la extracción de la aguja, quedando simplemente el hilo como guía para los posteriores procesos (biopsia o cirugía), como se observa en la Figura 1.4. Comentan en este artículo las dificultades que el método presenta, enfatizando la mayor dificultad que presenta el proceso en el caso de pechos grandes y colgantes. Comentan también que, aunque el método usando tinte como guía se podía usar de forma satisfactoria, la dispersión de la tinta en el medio, especialmente cuando la tinta entra en algunos conductos, hace que esta forma de realizar el procedimiento sea menos precisa que usando el hilo. Respecto al procedimiento en que se utiliza la propia aguja como guía, remarcan que la introducción del hilo es una mejora significativa, debido a que la fijación es automática a través del gancho, no requiriendo una fijación activa, a diferencia del caso de la aguja. Este hecho facilita mucho el paso del preparatorio a la mesa de operaciones, evitando posibles desplazamientos de la guía.

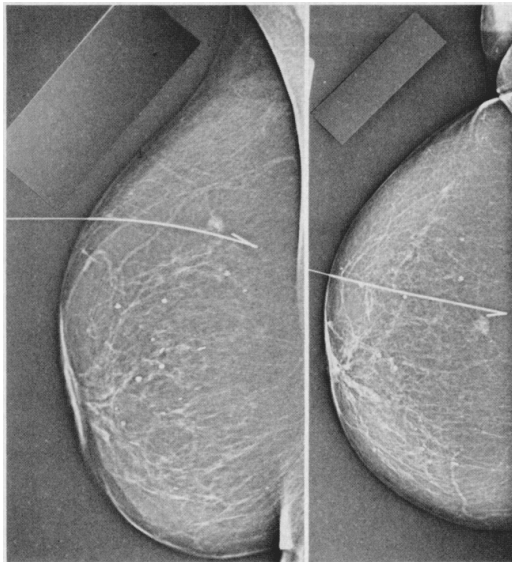


Figura 1.4: Localización por aguja usando el enfoque del hilo de alambre con un gancho en la punta.

Fuente: [Big85]

Este método es, en esencia, el utilizado hoy en día.

Como puede apreciarse, la pericia de los doctores en el proceso es crucial, ya que la correcta introducción de la aguja determina la cantidad de tejido sano que será dañado en el proceso. El objetivo es dañar el menor tejido sano posible, aunque es evidente que siempre habrá algún daño derivado de la

intervención. Nuestro objetivo es, por tanto, tratar de mejorar este proceso con la ayuda que nos ofrece la computación. La idea es usar la gran cantidad de información que proporcionan las mamografías 3D modernas, en las que la determinación de todos los componentes de la mama, así como de los tejidos anómalos, se efectúa con gran precisión. Esta información podría utilizarse, en principio, para obtener la posición de la lesión ante las deformaciones sufridas por el pecho al cambiar la posición de la mujer, por ejemplo al cambiar de una posición sentada en la máquina mamográfica (mamógrafo 3D) a la posición acostada boca arriba en la mesa de operaciones. Esta idea ha sido estudiada desde diversos enfoques, siendo el principal de ellos la utilización del método de los elementos finitos.

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. El método de los elementos finitos aplicado al modelado de las deformaciones del tejido mamario

La base teórica de este método se desarrolla en el Capítulo 3, y aquí nos vamos a centrar en cómo diversos autores lo han utilizado para afrontar el problema de localización del tumor de mama a partir de la mamografía. La idea es aplicar el método de los elementos finitos, frecuentemente utilizado para modelar estructuras de carga o problemas de dinámica de fluidos, para poder estimar la posición de una lesión en un pecho del que se dispone de una mamografía previa, sin necesidad de ejecutar la localización por aguja. Este fin es bastante ambicioso, pero no es descabellado que esta idea pueda ser útil, al menos, para que el doctor pueda estimar mejor el lugar por donde introducir la aguja para minimizar los daños.

2.1.1. Propiedades mecánicas del tejido mamario

Es relevante considerar las características físicas de un problema que se trata de modelizar matemáticamente. A este respecto, un muy buen estudio es el realizado en [Kro+98], que vamos a detallar en esta subsección.

Explican que los tejidos biológicos son complejos de modelar matemáticamente, debido a que suelen ser dependientes del tiempo, la humedad, la propia edad del tejido, así como la presión aplicada para las pruebas y el rango de presión investigado. Por tanto, deben introducirse simplificaciones sobre el comportamiento y las propiedades del material, que consideraron lineal (sigue la ley de Hooke clásica sobre elasticidad), elástico, isotrópico (las propiedades son las mismas en las tres direcciones del espacio) e incomprensible (las deformaciones del tejido no varían su volumen). De forma que el artículo se centra en la determinación del módulo de Young, en función del material, independientemente de la geometría y las condiciones de frontera del mismo. Utilizaron, para determinar el módulo de Young en los tejidos estudiados, la ecuación:

$$E = \frac{2(1 - \nu^2)qa}{w}, \quad (2.1)$$

donde E es el módulo de Young, ν el ratio de Poisson¹, q la densidad de la carga aplicada, a el radio del área sobre la que se aplica la carga y w el desplazamiento máximo en la dirección de la carga.

¹Asumen que el material es incomprensible y tiene un ratio de Poisson $\nu = 0,495$.

Para el estudio, tomaron muestras de los distintos tejidos y se les sometió a presiones variables de forma sinusoidal a frecuencias de 0.1, 1.0 y 4.0 Hz. Además, dado que el módulo de Young no es constante y depende del nivel de precompresión inicial del tejido, se usaron dos niveles de esta precompresión inicial.

Los resultados obtenidos fueron los de la Tabla 2.1. Como se puede observar, la frecuencia de la carga afecta significativamente al valor de E . Además, como era de esperar, el tejido fibroso presenta valores más altos que los obtenidos para la grasa, ya que esta es mucho más elástica.

| Tipo de Tejido | Módulo de Young (kPa) | | | | | |
|---|---|--------------|--------------|--|---------------|---------------|
| | Precompresión del 5 % Frecuencia de carga (Hz) | | | Precompresión del 20 % Frecuencia de carga (Hz) | | |
| | 0.1 | 1.0 | 4.0 | 0.1 | 1.0 | 4.0 |
| Grasa normal | 18 ± 7 | 19 ± 7 | 22 ± 12 | 20 ± 8 | 20 ± 6 | 24 ± 6 |
| Tejido glandular normal | 28 ± 14 | 33 ± 11 | 35 ± 14 | 48 ± 15 | 57 ± 19 | 66 ± 17 |
| Tejido fibroso | 96 ± 34 | 107 ± 31 | 116 ± 28 | 218 ± 87 | 232 ± 60 | 244 ± 85 |
| Carcinoma ductal in situ | 22 ± 8 | 25 ± 4 | 26 ± 5 | 291 ± 77 | 301 ± 58 | 307 ± 78 |
| Carcinoma ductal invasivo e infiltrante | 106 ± 32 | 93 ± 33 | 112 ± 43 | 558 ± 180 | 490 ± 112 | 460 ± 178 |

Tabla 2.1: Resultados para el módulo de Young en cada tejido bajo distintas condiciones.

Fuente: [Kro+98].

2.1.2. Modelos en elementos finitos

En [AMS00] se presenta el primer modelo en elementos finitos de un pecho a partir de un escáner médico y en [AMS02] desarrollan con más detalle el procedimiento y el análisis de los resultados que obtuvieron. En su caso, utilizaron un escáner obtenido mediante resonancia electromagnética. El procedimiento que siguen es el siguiente:

1. Obtención del escáner 3D de la mama mediante resonancia electromagnética.
2. Preprocesamiento del escáner para segmentarlo en los distintos tejidos del pecho.
3. Mediante un programa propio, se discretiza la mama, usando hexaedros para modelar el volumen interior y triángulos para modelar la piel. El resultado es compatible con el software ABAQUS².
4. A cada elemento finito se le asignan las propiedades del tejido del que está compuesto. Como un elemento puede estar formado de varios tejidos, tratan de determinar el porcentaje de cada uno. El más abundante es el considerado como material del elemento.
5. Consideran una primera imagen en la que el pecho no está comprimido, y lo irán comprimiendo mediante placas y realizando distintos escáneres. Para modelar esto, aplican el método de los elementos finitos iterativamente, actualizando las condiciones iniciales y la fuerza provista por las placas.

²Una suite de análisis en elementos finitos e ingeniería computacional. Para más información, véase [Smi09].

Para hacer esto, consideran que todos los tejidos involucrados son isotrópicos³, homogéneos⁴, incomprensibles⁵ y con propiedades elásticas no lineales. Así, utilizan un módulo de Young variable, dependiente del nivel de compresión. Como hemos mencionado, dividen el proceso en subetapas, por lo que para modelar la no linealidad varían el módulo de Young en cada iteración, aunque es constante para cada tejido en cada subetapa. Es decir, modelan la no linealidad del proceso mediante una consecución de modelos lineales cuyos parámetros cambian conforme avanza el proceso.

En la Figura 2.1 podemos ver sus resultados. Se observa que, a pesar de utilizar un modelo con baja densidad de elementos, los resultados predichos por el modelo se ajustan bastante a los obtenidos finalmente en el escáner. Por tanto, parece posible utilizar este enfoque para el problema de la localización de la masa en el pecho.

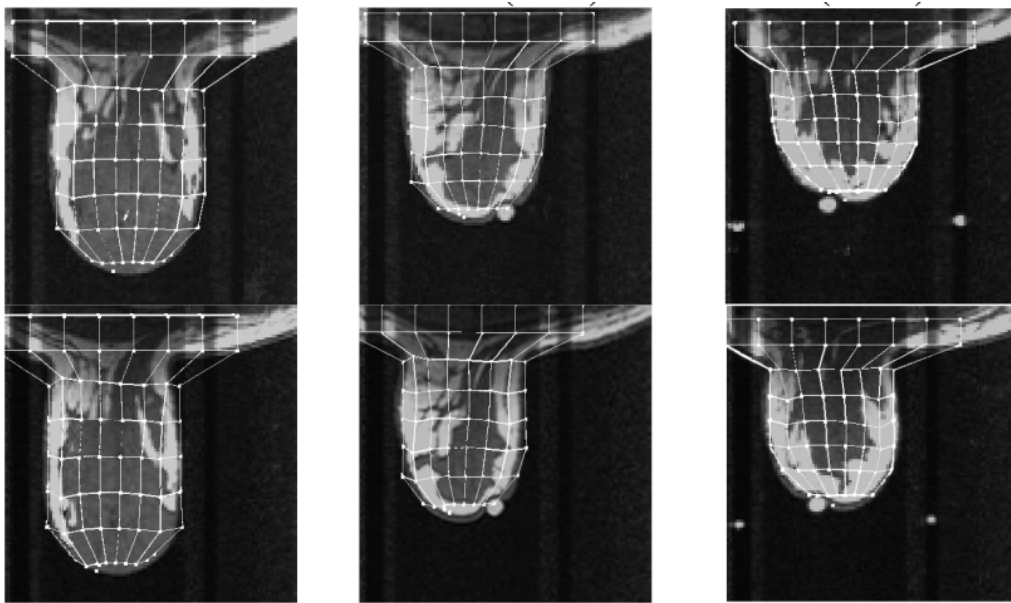


Figura 2.1: Resultados del modelo en elementos finitos.

En la parte superior se muestra una sección del escáner inicial y, superpuesta, una sección del modelo en elementos finitos inicial. En la parte inferior se muestran las situaciones al aumentar la compresión de las placas, escaneadas, y superpuesto el resultado del método. A la izquierda se sigue el desplazamiento de un quiste, en las imágenes central y derecha se sigue una pastilla de vitamina E, vista desde abajo y desde arriba, respectivamente.

Fuente: [AMS00]

La parte positiva de este método es evidente, su precisión es muy alta. No obstante, presenta un gran problema, y este es que los tiempos de cómputo son altos, del orden de las decenas de minutos si se quiere trabajar con un modelo suficientemente parecido al escáner original como para esperar resultados precisos. A este respecto, diversos estudios posteriores han tratado de atajar este problema de diferentes formas. Una investigación anterior, [BC96], presenta resultados en el modelado de tejidos corporales utilizando únicamente la superficie externa. Estos modelos son más rápidos, pero presentan menor precisión. En el estudio español [Pal+08], descubrieron que la proporción entre los volúmenes de tejido glandular y de grasa es el factor más importante en la deformación del pecho. En [Llo+12]

³El material se comporta igual en todas las direcciones.

⁴De composición uniforme.

⁵Su volumen no varía con las deformaciones.

añadieron al modelo el grosor de la piel, lo que mejora más aún la precisión de las simulaciones. En [Han+11] se desarrolla un *solver* de problemas en elementos finitos, que estima las propiedades del pecho para cada paciente estudiado, a través de un modelo de optimización de parámetros. Por último, en [Mar+17], otra investigación española, utilizaron SOFA⁶ para simular las deformaciones del pecho. Como puede observarse, si bien la mejora computacional experimentada desde el año 2000 en que se realizó el estudio de [AMS00], con el aumento de las memorias RAM, las mejoras en el acceso a memoria, el desarrollo de supercomputadores y la introducción de GPUs, han permitido mejorar los tiempos de ejecución de estas simulaciones, estos aún no son suficientemente buenos como para su uso en aplicaciones de tiempo real.

Este enfoque fundamentado en el método de los elementos finitos será en el que se basa este trabajo de fin de grado, aunque no es el único enfoque posible, como vamos a ver.

2.2. Modelado en tiempo real de las deformaciones del tejido mamario utilizando redes neuronales artificiales

En [WK22], un artículo de muy reciente publicación, estudian la forma de mejorar la velocidad de las simulaciones, hasta el punto de poder ser realizadas en tiempo real, sirviendo como un apoyo de alto valor para los médicos. Su enfoque se motiva en la investigación detallada en [TGY17], donde utilizan una red neuronal artificial para predecir la localización de tumores en el cerebro.

En este artículo, los autores remarcan la lentitud de la simulación mediante el método de los elementos finitos, que impide su uso en aplicaciones de tiempo real. Desarrollan, para solventar este problema, un modelo compuesto de dos redes neuronales:

- Una primera red neuronal que se encarga de predecir los desplazamientos de todos los nodos de la frontera de la mama. Esta se compone de dos capas ocultas, cada una con 60 neuronas, con función de activación ReLU en las capas intermedias. Además, tiene tantas neuronas de salida como de entrada, y esta es la cantidad de nodos de la superficie de la mama, por tres direcciones espaciales.
- Una segunda red neuronal que se encarga de estimar la posición final del punto central del tumor. Su estructura es similar a la anterior, aunque esta dispone únicamente de una capa oculta con 20 neuronas.

Los resultados fueron muy precisos, con unas diferencias entre las estimaciones obtenidas y los desplazamientos reales observados bastante bajas. En la Figura 2.2, podemos ver el error obtenido asociado a la cantidad de desplazamiento, en el caso de deformaciones grandes. Como puede observarse, la red neuronal que se encarga de la frontera, capta muy bien el comportamiento de aquellas zonas que más se deforman, y que donde más error se produce es en zonas de un desplazamiento medio/bajo.

⁶Simulation Open Framework Architecture es un software de código abierto que permite hacer simulaciones físicas. Para más información, puede consultarse [Fau+12].

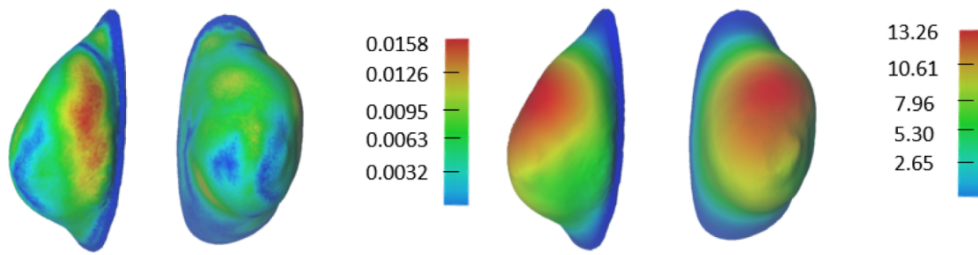


Figura 2.2: Modelado de grandes deformaciones con redes neuronales artificiales.

A la izquierda vemos el error desde una vista lateral y frontal. A la derecha vemos el desplazamiento desde una vista lateral y frontal.

Fuente: [WK22].

En contraposición, podemos ver qué sucede el modelar deformaciones pequeñas. En la Figura 2.3, vemos como en el caso de pequeñas deformaciones sucede lo contrario, y el error es tanto mayor cuanto mayor es el desplazamiento.

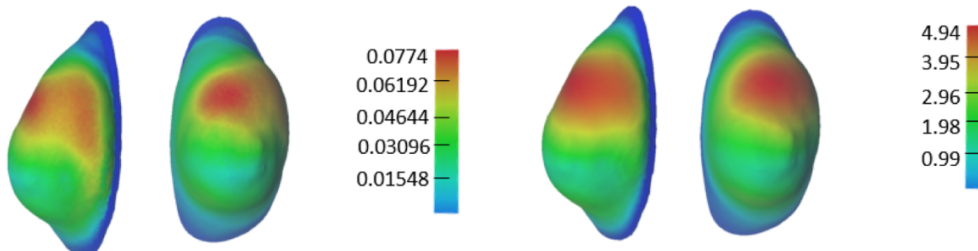


Figura 2.3: Modelado de pequeñas deformaciones con redes neuronales artificiales.

A la izquierda vemos el error desde una vista lateral y frontal. A la derecha vemos el desplazamiento desde una vista lateral y frontal.

Fuente: [WK22].

En la Figura 2.4, podemos ver el resultado obtenido por el modelo para distintas posiciones de la paciente, y para dos porcentajes diferentes de tejido glandular. Como se ve en la figura, al aumentar este porcentaje, disminuyen los vectores de desplazamiento, a pesar de que, dada la mayor densidad del tejido glandular respecto al tejido adiposo, era de esperar que sucediese lo contrario, obteniendo mayores deformaciones. La razón es que el tejido glandular es mucho más rígido que la grasa.

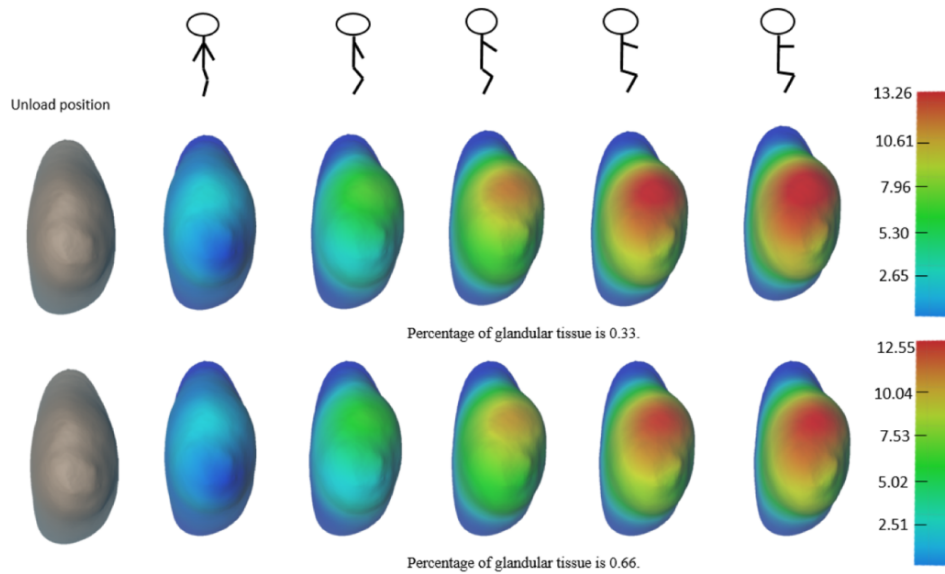


Figura 2.4: Resultados del modelo de redes neuronales artificiales.

A la izquierda del todo, se observa la posición inicial, y al avanzar a la derecha se ven los resultados obtenidos al colocar a la paciente en distintas posiciones. En la parte de arriba se simula una proporción de tejido glandular de 0.33. En la parte de abajo se simula una proporción de 0.66.

Fuente: [WK22].

Por último, mencionan los autores que la geometría de la forma del tumor no puede ser mantenida de forma correcta mediante la aplicación de su método, aunque el movimiento capturado al tomar un único punto representante del tumor se muestra consistente con el resto de la deformación de la mama.

Capítulo 3

Desarrollo teórico del método de los elementos finitos

3.1. Método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos es una técnica de integración numérica, ampliamente utilizada para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, cuya resolución analítica es compleja o, en muchas ocasiones, imposible. El método se basa en el método de aproximación de Galerkin, que es un famoso resultado que podemos consultar en [Cas12]. Además, es ampliamente utilizado en distintos problemas de ingeniería, apoyado por la mejora del hardware de los últimos tiempos, pero también del software lateral al propio método. Por ejemplo, no es una cuestión para nada trivial el cómo representar objetos físicos tridimensionales en un ordenador. Algunos detalles de la formalización matemática serán obviados por simplicidad. En estos casos, el lector puede consultar las referencias mencionadas para profundizar en la rigurosidad del método.

Para la explicación del método de los elementos finitos, o FEM, por sus siglas en inglés, vamos a realizar un desarrollo similar al que se puede encontrar en [JJ87] y, más concretamente, voy a seguir un planteamiento análogo al que se realiza en [Gar]. Comenzaremos por el caso unidimensional, por la simplicidad en la formulación y comprensión del método, para dar paso al contexto más general tridimensional.

3.1.1. FEM: La ecuación diferencial elíptica unidimensional

Una descripción profunda de los distintos tipos de ecuaciones diferenciales, y en concreto de las elípticas, puede consultarse en [Yeh15]. Para nuestro propósito, basta considerar el siguiente problema diferencial:

Llamemos $\Omega = (0, L)$ al conjunto abierto en que estamos interesados. Este conjunto podrá ser interpretado en términos del problema como cierto medio físico con unas características concretas. Nuestro objetivo será encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que explique el fenómeno físico que estudiamos.

En el caso elíptico que estamos estudiando, dispondremos de las condiciones de frontera:

- $u(0) = u_0$, este tipo de condiciones se denominan **condiciones de frontera de tipo Dirichlet**.
- Para el extremo $x = L$, contemplamos dos posibilidades:

- $u(L) = u_g$ (otra condición de tipo Dirichlet); o
- $E \cdot u_{,x} = t^1$, este tipo de condición se denomina **condición de frontera de tipo Neumann**. E es simplemente una constante que dependerá de las características del medio.

También conocemos la fuerza, $f(x)$, que sufre cada punto del medio, así como la ecuación constitutiva²

$$\sigma = E \cdot u_{,x}.$$

Toda esta información queda esquematizada en el diagrama de la figura 3.1.

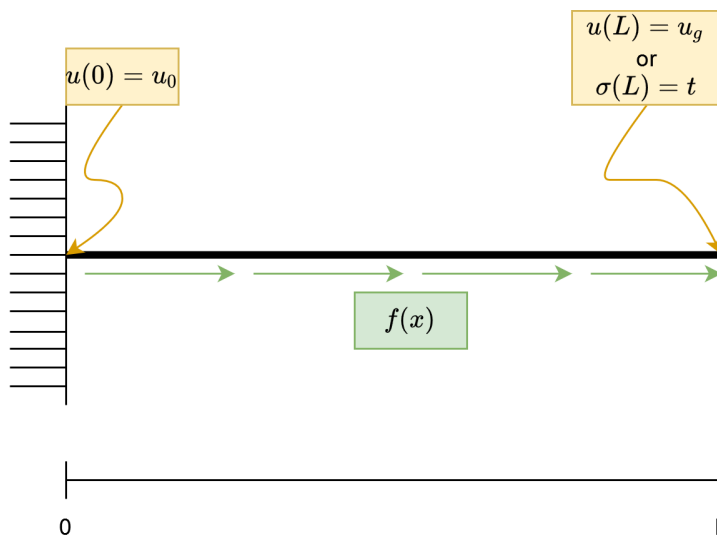


Figura 3.1: Diagrama de la configuración del problema elíptico unidimensional.

Así, el problema finalmente será encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d\sigma}{dx} + f = 0 \quad \text{en } (0, L), \tag{3.1}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u(L) = u_g \\ \sigma(L) = t. \end{cases}$$

Cuando las condiciones de frontera son $u(0) = 0$ y $u(L) = u_g$ decimos que tenemos condiciones de Dirichlet puras, frente al otro caso, que denominamos condiciones de Dirichlet-Neumann.

¹Nótese la utilización del subíndice $_{,x}$ para indicar la diferenciación. Esto será recurrente a lo largo de la memoria, queriendo significar $f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Esto simplifica la notación, aunque debemos ser cuidadosos cuando usemos subíndices junto con esta notación.

²Una **ecuación constitutiva** no es más que una relación entre diferentes variables físicas que describe algún fenómeno. Por ejemplo, la usada en nuestro caso, σ , en el caso de la elasticidad indica la variación en la posición al desplazarnos a lo largo de la varilla que estamos considerando y la relaciona con la fuerza experimentada. Esta ecuación es la famosa ecuación de Hooke y puede profundizarse en la comprensión de esta y otras ecuaciones constitutivas en [Hen17].

Con esta formulación podemos modelar tres famosos problemas físicos:

1. Difusión de calor unidimensional en condiciones estables (*steady state* en la nomenclatura inglesa).
2. Difusión de masa unidimensional en condiciones estables.
3. Problema de elasticidad unidimensional en condiciones estables.

De entre estos, nos vamos a centrar en el tercero, el problema de elasticidad unidimensional³, y daremos significado físico a las diferentes variables y magnitudes de las que disponemos. De esta manera, en el contexto del problema de elasticidad, encontramos que podemos interpretar el medio como una varilla de cierto material elástico, sometido a distintas condiciones, que detallamos:

- u_0 representa el desplazamiento sufrido por el extremo izquierdo de la varilla. Normalmente será 0, indicando que ese extremo queda fijo (por estar sujeto a una pared, por ejemplo).
- $f(x)$ es una fuerza que se aplica a lo largo de la varilla. Nótese que, en principio, puede tener diversas formas y no tiene por qué ser constante.
- u_g sería el desplazamiento al que obligamos a ir al extremo derecho de la varilla (por tirar de él, por ejemplo).
- t , por otro lado, indicaría una fuerza con la que se desplaza ese extremo derecho.
- E se denomina **módulo de Young**, y es una constante física que relaciona la tensión con el desplazamiento. Depende del material y podría ser variable a lo largo de la varilla⁴. Cuanto mayor es E , más rígido es el material.
- $u_{,x}$ es la **tensión**, que indica en qué medida se desplaza cada punto en relación a los demás ante una deformación.
- σ es el **estrés**, o sea, la fuerza por unidad de espacio. Queda determinada, según la ecuación constitutiva considerada, por la tensión y el módulo de Young.

Por consiguiente, buscamos obtener la función $u(x)$, que nos indica cómo se deforma la varilla bajo las condiciones consideradas.

Esta formulación se conoce como **Forma Fuerte**⁵ de la ecuación en derivadas parciales (EDP) lineal, elíptica y unidimensional. Esta se corresponde con la manera clásica en la que se plantean las ecuaciones diferenciales: mediante una relación entre la función buscada y sus derivadas. Frente a este enfoque, se encuentra el enfoque más moderno de la **Forma Débil** de una EDP, que consigue expresar la ecuación diferencial en términos de integrales, y es esto precisamente lo que posibilitó el desarrollo del FEM.

3.1.2. La forma débil de la EDP lineal, elíptica y unidimensional.

Vamos ahora a concretar el significado de lo que hemos llamado forma débil de la EDP, así como su relación con la forma fuerte.

³Esta es la versión más simplificada posible del problema real al que nos enfrentamos.

⁴Por ejemplo, una varilla con densidad variable podría presentar este comportamiento. No obstante, nosotros vamos a considerar que es constante.

⁵Para más información sobre la forma fuerte y débil de una ecuación funcional, consúltese [Cas12].

Primero, vamos a definir $\mathcal{S} = \{u|u(0) = u_0\}$, el espacio de funciones en el que buscamos nuestra u y $\mathcal{V} = \{w|w(0) = 0\}$ el subespacio de \mathcal{S} de las funciones con condición de Dirichlet homogénea⁶. Estas funciones w se denominan **funciones de peso** y serán cruciales en el desarrollo del FEM.

Así, la formulación débil del problema que estamos considerando queda expresada como sigue:

Encuéntrese $u \in \mathcal{S}$, dada la información u_0 , t , $f(x)$ y la ecuación constitutiva $\sigma = E \cdot u_{,x}$, tal que, para todo $w \in \mathcal{V}$ se verifica

$$\int_0^L w_x \sigma dx = \int_0^L w f a dx + w(L) \cdot t \cdot a, \quad (3.2)$$

donde a representa el área transversal de la varilla, que vamos a suponer constante en este desarrollo.

Como vemos, el problema queda expresado en términos de $\sigma = E u_{,x}$, w y $w_{,x}$, aunque parece que estamos ahora tratando un tema muy distinto. Vamos a ver enseguida que, en realidad, ambas formulaciones son equivalentes.

Teorema 3.1.1. *La forma fuerte con condiciones de Dirichlet-Neumann y la débil son equivalentes.*

Demostración. Vamos a comenzar viendo que partiendo de la forma fuerte, podemos obtener la débil.

Así, consideremos la forma fuerte

$$\frac{d\sigma}{dx} + f = 0 \quad \text{en } (0, L)$$

con $u(0) = 0$, $\sigma(L) = t$, siendo σ tal que satisface la ecuación constitutiva $\sigma = E u_{,x}$.

Introducimos, ahora una función de peso $w \in \mathcal{V}$ y a el área transversal de la varilla, de forma que la anterior ecuación es equivalente a

$$w a \frac{d\sigma}{dx} + w a f = 0.$$

Aquí, integramos a lo largo de la varilla

$$\int_0^L w a \frac{d\sigma}{dx} dx + \int_0^L w a f dx = 0.$$

En la primera integral aplicamos integración por partes, y tenemos

$$- \int_0^L w_x \sigma a dx + w \sigma a \Big|_0^L + \int_0^L w a f dx = 0,$$

lo que es lo mismo que

$$\int_0^L w_x \sigma a dx = \int_0^L w a f dx + w(L) \sigma(L) a - w(0) \sigma(0) a.$$

⁶El término *homogéneo* quiere decir que la condición es que la función se anula en la frontera.

Ahora bien, $w(0) = 0$ y $\sigma(L) = t$, por lo que tenemos

$$\int_0^L w_x \sigma a dx = \int_0^L w a f dx + w(L) t a,$$

que es la forma débil de la EDP, como queríamos ver.

Por otro lado, veamos que desde la formulación débil podemos obtener la fuerte.

Para ello, sea $u \in \mathcal{S}$ tal que para todo $w \in \mathcal{V}$ se verifica

$$\int_0^L w_x \sigma a dx = \int_0^L w a f dx + w(L) t a.$$

De nuevo, integramos por partes la primera integral, obteniendo

$$-\int_0^L w \sigma_x a dx + w \sigma a \Big|_0^L = \int_0^L w a f dx + w(L) t a,$$

aquí desarrollamos los términos de la frontera

$$-\int_0^L w \sigma_x a dx + w(L) \sigma(L) a - \cancel{w(0)} \sigma(0) a = \int_0^L w a f dx + w(L) t a,$$

y tenemos

$$-\int_0^L w \sigma_x a dx + w(L) \sigma(L) a = \int_0^L w a f dx + w(L) t a,$$

o equivalentemente

$$-\int_0^L w (\sigma_x + f) a dx + w(L) (\sigma(L) - t) a = 0.$$

Ahora bien, esto se verifica para todo $w \in \mathcal{V}$, por lo que lo hace en particular para $w(x) = \varphi(x) (\sigma_x + f)$ donde $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ y $\varphi(x) > 0$ para $x \in (0, L)$. Es decir, que en particular se verifica

$$-\int_0^L \varphi (\sigma_x + f)^2 a dx + \cancel{w(L)} (\sigma(L) - t) a = 0,$$

o sea, que

$$\int_0^L \varphi (\sigma_x + f)^2 a dx = 0.$$

Pero $\varphi > 0$ en $(0, L)$, $a > 0$ y $(\sigma_x + f)^2 \geq 0$, por lo que debe ser $(\sigma_x + f)^2 = 0$ y entonces

$$\sigma_x + f = 0, \tag{3.3}$$

que es precisamente la ecuación diferencial de la formulación fuerte. Solo resta obtener la condición de frontera. Para ello, con un argumento similar al anterior, tomamos $w \in \mathcal{V}$ de forma que $w(0) = 0$ y $w(L) \neq 0$. Y tenemos la ecuación

$$-\int_0^L w (\sigma_x + f) a dx + w(L) (\sigma(L) - t) a = 0,$$

pero por 3.3 queda

$$w(L) (\sigma(L) - t) a = 0,$$

y dado que $w(L), a > 0$ finalmente se tiene la condición de Neumann

$$\sigma(L) = t.$$

□

Una vez establecida la equivalencia de ambas formulaciones, sabemos que resolviendo cualquiera de estas, habremos resuelto el problema de la elasticidad. Vamos ahora a ver que la forma débil puede resolverse aproximadamente de manera relativamente sencilla. Esta resolución aproximada será, efectivamente, el método de los elementos finitos.

3.1.3. La formulación débil finito-dimensional.

Como hemos adelantado, el método de los elementos finitos se basa en una versión aproximada de la formulación débil, que nos proporcionará soluciones aproximadas a la de la formulación débil original.

Recordemos que estamos considerando $u \in \mathcal{S}, w \in \mathcal{V}$, y que estos espacios de funciones pueden ser de dimensión infinita, por ejemplo, podría ser que fuesen subconjuntos de $\mathcal{H}^2(\Omega)$. No obstante, podemos considerar subespacios finito-dimensionales de estos espacios funcionales, de manera que encontrar la solución restringida a estos subespacios sea una tarea sencilla, pero a la vez mantengamos cierta fidelidad en la descripción del problema físico modelado.

Así, consideremos $\mathcal{S}^h = \{u^h | u^h(0) = u_0\} \subset \mathcal{S}$ un subespacio de dimensión finita en el que se sigue verificando la condición de frontera y, de manera análoga, $w^h \in \mathcal{V}^h = \{w^h | w^h(0) = 0\} \subset \mathcal{V}$.

Así, definimos la **formulación débil finito-dimensional** o **formulación débil de Galerkin** como sigue:

Encuéntrese $u^h \in \mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$, dados $f(x), t, a$ y la ecuación constitutiva $\sigma^h = Eu_{,x}^h$, tal que, para todo $w \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ se verifica

$$\int_0^L w_{,x}^h \sigma^h dx = \int_0^L w^h f dx + w^h(L) ta. \quad (3.4)$$

Observación 3.1.2. A la función u^h se la denomina **función de prueba**.

Observación 3.1.3. La formulación débil de Galerkin no es equivalente a la formulación fuerte, en general.

Observación 3.1.4. Notemos que $f(x)$ no la restringimos a un subespacio finito, sino que permitimos que tenga cualquier forma.

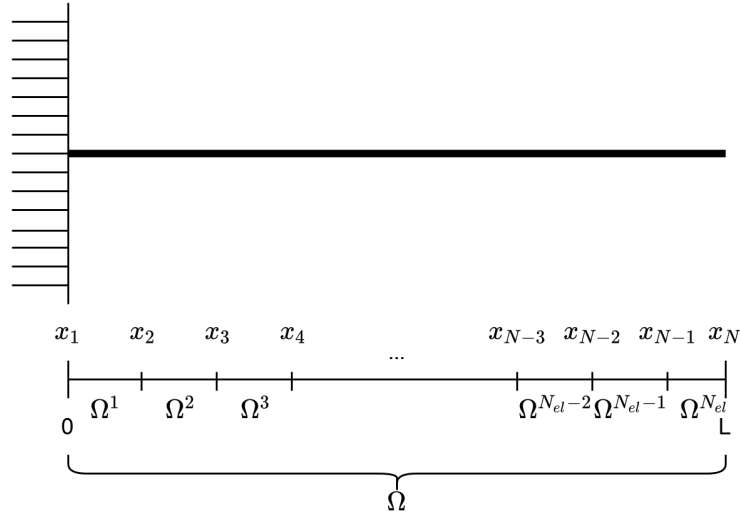
Ahora bien, debemos ser capaces de obtener u^h y w^h para resolver el problema, y debe de ser más sencillo que el problema original.

Vamos a particionar Ω en N_{el} subdominios disjuntos, Ω^e , para $e = 1, \dots, N_{el}$ de forma que cada Ω^e es abierto y $\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega^e$. Estos subdominios se denominan **elementos finitos**.

En el caso unidimensional, dividiremos el intervalo $(0, L)$ en N_{el} subintervalos disjuntos, como en la figura 3.2. Como vemos, introduciremos N puntos $x_i, i = 1, \dots, N$, siendo $N = N_{el} + 1$. Estos puntos se denominan **nodos**.

En esta situación, podemos reescribir la formulación débil de Galerkin, 3.4 como

$$\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} w_{e,x}^h \sigma^h dx = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} w_e^h f dx + w^h(L) ta, \quad (3.5)$$

Figura 3.2: Partición de Ω en elementos finitos.

y entonces basta con ser capaces de obtener u^h, w^h en cada elemento finito Ω^e . Así, nos vamos a centrar en un único elemento Ω^e , en el que vamos a definir una base finita local de funciones base. Al juntar todas ellas obtendremos una base finita de funciones de Ω .

Vamos a considerar bases de polinomios, comenzando por el caso de funciones lineales. Definimos entonces la base $\{N^1, N^2\}$, siendo N^1, N^2 funciones lineales que denominamos **funciones base**. De esta manera, podemos expresar u^h y w^h en cada elemento como

$$\begin{aligned} u_e^h(x) &= d_e^1 \cdot N^1(x) + d_e^2 \cdot N^2(x), \\ w_e^h(x) &= c_e^1 \cdot N^1(x) + c_e^2 \cdot N^2(x). \end{aligned}$$

Los coeficientes d_e^A, c_e^A se denominan **grados de libertad nodales del elemento e** . Además, si llamamos N_{n_e} a la cantidad total de nodos por elemento, podemos reescribir estas funciones como

$$\begin{aligned} u_e^h &= \sum_{A=1}^{N_{n_e}} d_e^A \cdot N^A(x), \\ w_e^h &= \sum_{A=1}^{N_{n_e}} c_e^A \cdot N^A(x). \end{aligned}$$

Para definir estas funciones, vamos a definir las en un dominio aún más sencillo, para después transportarlas a Ω^e . Este dominio sencillo es $\Omega^\xi = (-1, 1)$ y se denomina **dominio bi-unidad**. El enfoque queda reflejado en la figura 3.3. Como podemos ver, podremos identificar $N^A(x) = N^A(x(\xi)) = N^A(\xi)$ en un elemento concreto.

Así, definimos las funciones base lineales mediante

$$\begin{aligned} N^1(\xi) &= \frac{1 - \xi}{2}, \\ N^2(\xi) &= \frac{1 + \xi}{2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

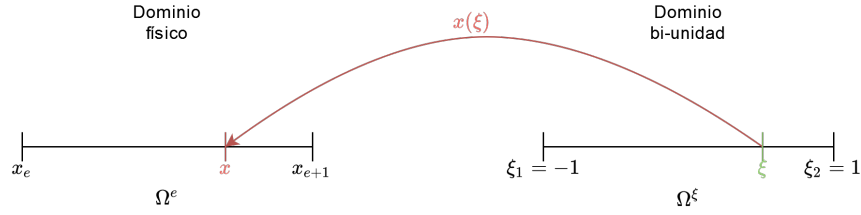


Figura 3.3: Mapeo del dominio bi-unidad a un elemento finito.

Observación 3.1.5. Estas funciones base verifican la **condición de la delta de Kronecker**. Es decir, cumplen

$$N^A(\xi_B) = \delta_{AB} = \begin{cases} 1 & A = B \\ 0 & A \neq B \end{cases}.$$

Observación 3.1.6. Se verifica, para todo $\xi \in \Omega^\xi$ que $\sum_{A=1,2} N^A(\xi) = 1$.

El mapeo puede visualizarse como en la figura 3.4.

Observación 3.1.7. Este proceso puede generalizarse para bases polinómicas de grado n usando los polinomios de Lagrange⁷.

Observación 3.1.8. La definición local de las funciones base lleva naturalmente a unas funciones base globales asociadas a cada nodo x_e , con soporte compacto en Ω^e y Ω^{e+1} . En este caso, e representa la numeración global del nodo. La numeración local es tal que el extremo izquierdo representa el primer nodo, y el extremo derecho es el segundo. Por tanto, el nodo x_{e+1} en la numeración global es el nodo 2 para el elemento Ω^e y el nodo 1 para el elemento Ω^{e+1} . Esta base global puede visualizarse en la figura 3.5.

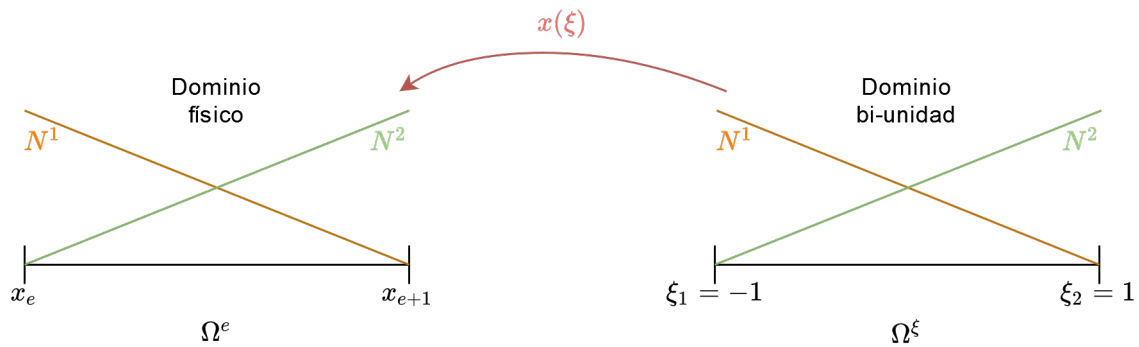


Figura 3.4: Mapeo de las funciones base del dominio bi-unidad a un elemento.

Observación 3.1.9. En el primer elemento, disponemos de la condición inicial $w^h(0) = 0$, por lo que la función base N^1 no aparecerá. Es decir, que será

$$w_1^h(x) = c_1^2 \cdot N^2(x).$$

⁷Para un desarrollo más detallado de esta familia de polinomios puede consultarse [ZTZ05].

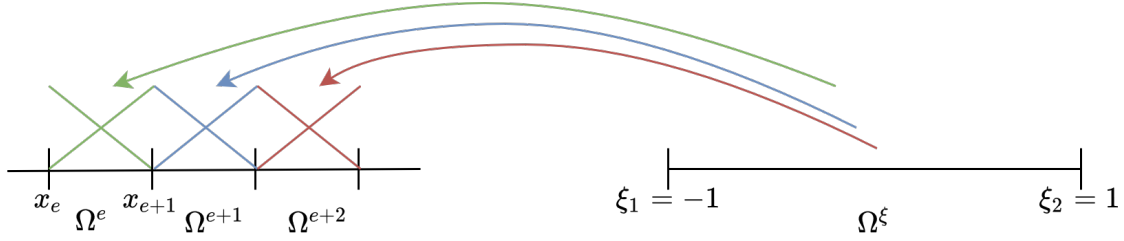


Figura 3.5: Base global de polinomios lineales a trozos.

Además, para obtener (3.5), debemos calcular las derivadas $w_{,x}^h$ y $u_{,x}^h$. Recordemos que es

$$u_e^h = \sum_{A=1}^{N_{ne}} d_e^A \cdot N^A(x),$$

pero podemos ver $N^A(x) = N^A(\xi(x))$ y derivar aplicando la regla de la cadena, para obtener

$$u_{e,x}^h(x) = \sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A(\xi(x)) \cdot \xi_{,x}(x) \cdot d_e^A.$$

De forma análoga tendremos

$$w_{e,x}^h(x) = \sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A(\xi(x)) \cdot \xi_{,x}(x) \cdot c_e^A,$$

por lo que solo resta obtener $\xi_{,x}$. Para hacer esto, necesitamos especificar la función que lleva $\xi \in \Omega^\xi$ a $x(\xi) \in \Omega^e$. Así, es

$$x_e(\xi) = \sum_{A=1}^{N_{ne}} N^A(\xi) \cdot x_e^A, \tag{3.7}$$

donde $N^A, A = 1, \dots, N_{ne}$ son las funciones de la base ya definidas y $x_e^A, A = 1, \dots, N_{ne}$ son los nodos numerados de forma local. En nuestro caso sería $\{x_e^1, x_e^2\} = \{x^e, x^{e+1}\}$. Esta elección de la función $x(\xi)$, que utiliza las mismas funciones de la base que u_e^h, w_e^h , se denomina **formulación isoparamétrica**. Notemos ahora que, por el teorema de la función inversa y dado que $x_e(\xi)$ es invertible, podemos obtener $\xi_{,x}$ a partir de $x_{,\xi}$.

Calculemos, pues, esta última función:

$$x_{e,\xi}(\xi) = N_{,\xi}^1(\xi) \cdot x_e^1 + N_{,\xi}^2(\xi) \cdot x_e^2 = -\frac{1}{2}x_e^1 + \frac{1}{2}x_e^2 = \frac{x_e^2 - x_e^1}{2} = \frac{h^e}{2},$$

donde $h^e = \frac{x_e^2 - x_e^1}{2}$ es la longitud de Ω^e , que puede ser diferente para cada elemento.

Por lo tanto, el teorema de la función inversa asegura que $\xi_{,x} = \frac{1}{x_{,\xi}} = \frac{2}{h^e}$ y obtenemos, finalmente

$$u_{e,x}^h = \sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A(\xi(x)) \cdot \frac{2}{h^e} \cdot d_e^A, \tag{3.8}$$

$$w_{e,x}^h = \sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A(\xi(x)) \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A. \tag{3.9}$$

Podemos, por tanto, sustituir esta nueva información en (3.5). Comencemos por la integral a la izquierda del igual:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} w_{,x}^h \sigma^h a dx &= \int_{\Omega^e} w_{,x}^h E a u_{,x}^h dx = \int_{\Omega^e} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A \right) E a \left(\sum_{B=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^B \cdot \frac{2}{h^e} \cdot d_e^B \right) dx \\
&= \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A \right) E a \left(\sum_{B=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^B \cdot \frac{2}{h^e} \cdot d_e^B \right) \frac{dx}{d\xi} d\xi \\
&= \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A \right) E a \left(\sum_{B=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^B \cdot \frac{2}{h^e} \cdot d_e^B \right) \frac{h^e}{2} d\xi \\
&= \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A \right) E a \left(\sum_{B=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^B \cdot d_e^B \right) d\xi,
\end{aligned}$$

y la integral de la derecha es

$$\int_{\Omega^e} w_e^h \cdot f a dx = \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N^A c_e^A \right) f(x(\xi)) a \frac{h^e}{2} d\xi.$$

En resumidas cuentas, tenemos

$$\int_{\Omega^e} w_{,x}^h \sigma^h a dx = \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^A \cdot \frac{2}{h^e} \cdot c_e^A \right) E a \left(\sum_{B=1}^{N_{ne}} N_{,\xi}^B \cdot d_e^B \right) d\xi \quad (3.10)$$

y

$$\int_{\Omega^e} w_e^h \cdot f a dx = \int_{\Omega^\xi} \left(\sum_{A=1}^{N_{ne}} N^A c_e^A \right) f(x(\xi)) a \frac{h^e}{2} d\xi. \quad (3.11)$$

Vamos ahora a ensamblar todo lo que ya sabemos de forma local a cada elemento, para obtener lo que se conoce como **formulación débil matriz-vectorial**, y que nos dará la información global para resolver el problema.

3.1.4. La formulación débil matriz-vectorial.

Para un elemento Ω^e con $e > 1$ tenemos

$$\int_{\Omega^\xi} \left(\sum_A N_{,\xi}^A c_e^A \right) E a \left(\sum_B N_{,\xi}^B d_e^B \right) \frac{2}{h^e} d\xi = \sum_{A,B} c_e^A \left(\int_{\Omega^\xi} N_{,\xi}^A \frac{2Ea}{h^e} N_{,\xi}^B d\xi \right) d_e^B, \quad (3.12)$$

dado que los grados de libertad son independientes de la variable de integración ξ . Para el primer elemento, lo que tenemos es que $c_1 = 0$, por lo que ese sumando desaparecerá.

De forma análoga se obtiene que

$$\int_{\Omega^\xi} \left(\sum_A N_{,\xi}^A c_e^A \right) f a \frac{h^e}{2} d\xi = \sum_A c_e^A \int_{\Omega^\xi} N_{,\xi}^A f \frac{a h^e}{2} d\xi.$$

Para el primer elemento quedará simplemente

$$c_1^2 \int_{\Omega^\xi} N_\xi^2 f \frac{ah^1}{2} d\xi.$$

y lo que queremos conseguir es escribir esto en forma matricial, eliminando los sumatorios. Para ello, vamos a hacer la suposición de que E y a son uniformes en cada elemento. Esto sirve para simplificar la notación de la explicación y veremos que esta suposición puede eliminarse sin problemas. Con esta suposición, queda

$$\sum_{A,B} c_e^A \left(\int_{\Omega^\xi} N_\xi^A \frac{2Ea}{h^e} N_\xi^B d\xi \right) d_e^B = \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{2Ea}{h^e} \left(\int_{\Omega^\xi} \begin{bmatrix} N_\xi^1 N_\xi^1 & N_\xi^1 N_\xi^2 \\ N_\xi^2 N_\xi^1 & N_\xi^2 N_\xi^2 \end{bmatrix} d\xi \right) \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Observación 3.1.10. Vemos una integral de una matriz, esto es simplemente una notación que indica la integral de cada componente de la matriz.

Observación 3.1.11. Esta última igualdad requiere de la suposición mencionada. Notemos que si prescindimos de la misma, en la matriz que integramos simplemente tenemos que añadir en cada elemento el término $\frac{Ea}{h^e}(x)$ y tenerlo en cuenta al integrar.

Si ahora recordamos las expresiones de N_ξ^i , $i = 1, 2$ y las integramos, podemos comprobar que se tiene que

$$\int_{\Omega^\xi} \begin{bmatrix} N_\xi^1 N_\xi^1 & N_\xi^1 N_\xi^2 \\ N_\xi^2 N_\xi^1 & N_\xi^2 N_\xi^2 \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \int_{\Omega^\xi} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ya que

$$\int_{\Omega^\xi} d\xi = \int_{-1}^1 d\xi = 2.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$(3.13) = \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{Ea}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Recordando ahora (3.10), tenemos entonces que

$$\int_{\Omega^e} w_{,x}^h \sigma^h a dx = \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{Ea}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix}.$$

Mediante un procedimiento análogo obtendremos la forma matriz-vectorial de (3.11), que vendrá dada por

$$\int_{\Omega^e} w^h f a dx = \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{fah^e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 3.1.12. En el caso especial $e = 1$, lo que se tiene es

$$\int_{\Omega^1} w_{,x}^h \sigma^h a dx = c_e^2 \frac{Ea}{h^e} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_1^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\int_{\Omega^1} w^h f a dx = c_e^2 f \frac{ah^e}{2} \cdot 1.$$

Por tanto, podemos reescribir la formulación débil finito-dimensional, (3.5), como

$$c_1^2 \frac{Ea}{h^1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_1^2 \end{pmatrix} + \sum_{e=2}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{Ea}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix} = \quad (3.15)$$

$$c_1^2 f \frac{ah^1}{2} \cdot 1 + \sum_{e=2}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} \frac{fah^e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_{n_{el}}^2 ta.$$

Observación 3.1.13. Nótese que la solución u^h coincide en los nodos con los grados de libertad. Efectivamente, se verifica que

$$u^h(x^e) = u^h(x(-1)) = \sum_A N_\xi^A(-1) d_e^A = \sum_A \delta_{A,1} d_e^A = d_e^1,$$

y

$$u^h(x^{e+1}) = u^h(x(1)) = d_e^2.$$

De igual forma se tiene que $w^h(x^e) = c_e^1$ y $w^h(x^{e+1}) = c_e^2$. Esto se verifica, como vemos, gracias a la propiedad de la delta de Kronecker que verifican las funciones de la base. Así, se dice que este espacio de funciones verifica la **propiedad de interpolación**.

Por último, queremos ahora expresar (3.15) prescindiendo de las sumas, utilizando únicamente notación matricial. Para ello, es necesario poder pasar de la información local a cada elemento finito a una información global. Para ello, utilizamos la siguiente expresión de los grados de libertad locales en función de los globales:

$$d_e^A = d_{e+A-1}, \quad c_e^A = c_{e+A-1}.$$

Además, vamos a llamar a

$$K_e = \frac{Ea}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

matriz de rigidez local al elemento e y a

$$F_e = \frac{fah^e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vector de fuerza local al elemento e . Por otro lado, vamos a definir el **operador de ensamblaje**, $\mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}}$, como el operador que transforma la expresión como sumas de las expresiones locales a una expresión matricial global. De esta manera, se tiene que

$$\mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} K_e \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} Ea \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^1} & \frac{1}{h^1} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^3} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{h^{n_{el}-1}} + \frac{1}{h^{n_{el}}} & -\frac{1}{h^{n_{el}}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^{n_{el}}} & \frac{1}{h^{n_{el}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n_{el}} \\ d_{n_{el}+1} \end{pmatrix}.$$

Nótese que c_1 no aparece porque recordemos que es nulo.

De igual forma, se tiene que

$$\mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} F_e = \begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} \frac{fa}{2} \begin{pmatrix} h^1 + h^2 \\ h^2 + h^3 \\ \vdots \\ h^{n_{el}-1} + h^{n_{el}} \\ h^{n_{el}} \end{pmatrix}.$$

Además, podemos expresar el término restante de (3.15) como

$$c_{n_{el}}^2 ta = \begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ta \end{pmatrix}.$$

Por tanto, (3.15) puede reescribirse como

$$\mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} K_e \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{e=1}^{n_{el}} \begin{pmatrix} c_e^1 & c_e^2 \end{pmatrix} F_e + c_{n_{el}}^2 ta,$$

o, equivalentemente, como

$$\begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} Ea \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^1} & \frac{1}{h^1} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^3} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \frac{1}{h^{n_{el}-1}} + \frac{1}{h^{n_{el}}} & -\frac{1}{h^{n_{el}}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^{n_{el}}} & \frac{1}{h^{n_{el}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n_{el}} \\ d_{n_{el}+1} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} \frac{fa}{2} \begin{pmatrix} h^1 + h^2 \\ h^2 + h^3 \\ \vdots \\ h^{n_{el}-1} + h^{n_{el}} \\ h^{n_{el}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & \dots & c_{n_{el}} & c_{n_{el}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ta \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Ahora, atendamos a las dimensiones de cada factor. La dimensionalidad es la siguiente:

$$(1 \times n_{el}) \cdot (n_{el} \times n_{el} + 1) \cdot (n_{el} + 1 \times 1) = (1 \times n_{el}) \cdot (n_{el} \times 1) + (1 \times n_{el}) \cdot (n_{el} \times 1).$$

Ahora bien, la primera columna de la matriz del lado izquierdo de la identidad y el d_1 nos dan las condiciones de frontera $u(0) = u_0$. Es decir, que d_1 no es una incógnita, sino un dato, por lo

que podemos pasarlo al lado derecho de la identidad. Es decir, que podemos expresar (3.16) como

$$\begin{aligned} & (c_2 \quad \dots \quad c_{n_{el}} \quad c_{n_{el}+1}) Ea \begin{pmatrix} \frac{1}{h^1} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{h^{n_{el}-1}} + \frac{1}{h^{n_{el}}} & -\frac{1}{h^{n_{el}}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^{n_{el}}} & \frac{1}{h^{n_{el}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ \vdots \\ d_{n_{el}} \\ d_{n_{el}+1} \end{pmatrix} = \\ & (c_2 \quad \dots \quad c_{n_{el}} \quad c_{n_{el}+1}) \left[\frac{fa}{2} \begin{pmatrix} h^1 + h^2 \\ h^2 + h^3 \\ \vdots \\ h^{n_{el}-1} + h^{n_{el}} \\ h^{n_{el}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ta \end{pmatrix} + \frac{Ea}{h^1} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En este punto, vamos a denotar

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \begin{pmatrix} c_2 \\ \vdots \\ c_{n_{el}} \\ c_{n_{el}+1} \end{pmatrix}_{(n_{el} \times 1)}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_2 \\ \vdots \\ d_{n_{el}} \\ d_{n_{el}+1} \end{pmatrix}_{(n_{el} \times 1)}, \\ F &= \left[\frac{fa}{2} \begin{pmatrix} h^1 + h^2 \\ h^2 + h^3 \\ \vdots \\ h^{n_{el}-1} + h^{n_{el}} \\ h^{n_{el}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ta \end{pmatrix} + \frac{Ea}{h^1} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{(n_{el} \times 1)} \end{aligned}$$

y

$$K = Ea \begin{pmatrix} \frac{1}{h^1} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} & -\frac{1}{h^3} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{h^{n_{el}-1}} + \frac{1}{h^{n_{el}}} & -\frac{1}{h^{n_{el}}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^{n_{el}}} & \frac{1}{h^{n_{el}}} \end{pmatrix}_{(n_{el} \times n_{el})}.$$

Es decir, \vec{c} es el vector de grados de libertad de w^h , \vec{d} es el vector de grados de libertad de u^h , F es el vector de fuerzas global y K es la matriz de rigidez global.

Usando todo esto, obtenemos finalmente la ecuación

$$\vec{c}^T \cdot K \cdot \vec{d} = \vec{c}^T \cdot F, \quad (3.18)$$

que se denomina **forma débil matriz-vectorial** de la formulación débil de Galerkin (3.4).

Ahora bien, recordemos que el vector \vec{c} representa los grados de libertad de la función w^h , pero, si nos fijamos en (3.4), esta ecuación debe verificarse para todo $w^h \in \mathcal{V}^h$. Esto es equivalente a decir que (3.18) debe verificarse para todo $\vec{c} \in \mathbb{R}^{n_{el}}$. Como se verifica para cualquier vector \vec{c} , entonces se dará la igualdad si, y solo si, se verifica

$$K \cdot \vec{d} = F. \quad (3.19)$$

Esta ecuación es la **forma final de la ecuación finito dimensional**.

Observación 3.1.14. 1. La matriz de rigidez global, K , es simétrica, definida positiva y con estructura tridiagonal.

2. Dentro del vector de fuerza global, F , tenemos el vector de tracción, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ta \end{pmatrix}$, dado por la condición de frontera de Neumann, y el vector de carga dirigida, $\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalmente, obtenemos la solución, que no es más que

$$\vec{d} = K^{-1} \cdot F. \quad (3.20)$$

Con este vector solución calculamos u^h a través de sus componentes $u_e^h = \sum_{A=1}^{N_{ne}} d_e^A \cdot N^A(x)$. Así, habremos resuelto el problema de forma aproximativa, dando u^h como solución.

El problema de la elasticidad: un ejemplo unidimensional

Vamos a desarrollar un ejemplo simple en el que quede patente la aplicación del FEM a un problema de elasticidad unidimensional. Así, sea el siguiente problema:

En el intervalo $\Omega = (0, 1)$, obtener u tal que

$$\frac{d\sigma}{dx} - 9,8 = 0, \text{ en } (0, 1),$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ \sigma(1) &= 0, \end{aligned}$$

y con la ecuación constitutiva $\sigma = E \cdot u_{,x} = u_{,x}$ (tomamos $E = 1$), además, la varilla tiene área seccional $a = 1$. Queda, entonces, el problema

$$u'' = 9,8, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

que simula la gravedad aplicada a una varilla elástica de masa 1, de forma que la fuerza de la gravedad es $F = ma = 1 \cdot 9,8 = 9,8$.

Solución exacta

Tenemos $u'' = 9,8$, por lo que $u(x) = 4,9x^2 + c_1x + c_2$. Como $u(0) = 0$, entonces $c_2 = 0$, y dado que $u'(1) = 9,8 + c_1 = 0$, entonces $c_1 = -9,8$. Es decir, la solución es $u(x) = 4,9x^2 - 9,8x$.

Solución aproximada mediante FEM

Dividimos el dominio $\Omega = (0, 1)$ en dos elementos finitos del mismo tamaño, de forma que $h^e = \frac{1}{2}$ para todo $e = 1, 2$. En este caso, tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 \end{pmatrix} Ea \begin{pmatrix} \frac{1}{h^1} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \end{pmatrix} \left[\frac{fa}{2} \begin{pmatrix} h^1 + h^2 \\ h^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ta \end{pmatrix} + \frac{Ea}{h^1} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

que, introduciendo los datos del problema, queda como

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \end{pmatrix} 4,9 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es decir, que

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} 4,9 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,675 \\ -4,9 \end{pmatrix}.$$

Así, $d^1 = 0$, $d^2 = 3,675$ y $d^3 = 4,9$ y podemos calcular ahora u_e^h , para $e = 1, 2$. Comenzamos por u_1^h . Dado que $d^1 = 0$, basta obtener N^2 . Para esto, llevamos el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ al $(-1, 1)$ mediante la aplicación $\xi(x) = -1 + 4x$ y teniendo finalmente $N_1^2(x) = N_\xi^2(\xi(x)) = \frac{1+\xi(x)}{2} = 2x$. Así, queda

$$u_1^h(x) = 0 \cdot N^1 - 3,675 \cdot N^2 = -7,35x,$$

en $(0, \frac{1}{2})$. Repitiendo el proceso para u_2^h , obtenemos

$$u_2^h(x) = -3,675 \cdot N^1 - 4,9 \cdot N^2 = -2,45 - 2,45x.$$

El resultado se puede ver en la Figura 3.6, donde vemos en azul la solución exacta al problema, u , y en rojo la solución aproximada, u_h . Se observa como las soluciones coinciden en los nodos que definen los elementos finitos. Al aumentar la densidad de la división, la solución aproximada se aproximaría más a la exacta.

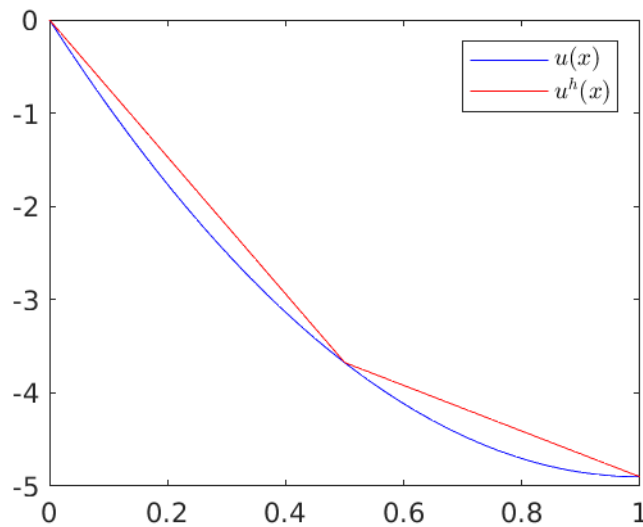


Figura 3.6: Ejemplo de la elasticidad 1D. Solución exacta vs. solución aproximada.

3.1.5. Integración numérica mediante cuadratura de Gauss

Hemos supuesto que E y a son constantes para simplificar la explicación. Además, hemos usado funciones lineales para definir la base de funciones. No obstante, esto no sucede así en general. De manera que para calcular las integrales de (3.12) se utiliza integración numérica. Concretamente, utilizaremos el proceso de integración numérica mediante **cuadratura de Gauss**, que consiste en evaluar las funciones en ciertos puntos, y ponderar los resultados mediante ciertos coeficientes. Es decir, se hace la aproximación

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \cdot w_k,$$

donde, como vemos, se asume que estamos integrando en el dominio biunidad, n es el número de puntos elegidos para el proceso, ξ_k son estos puntos, para $k = 1, \dots, n$ y w_k los pesos por los que se pondera el valor obtenido en cada punto. Estos pesos deben verificar que $\sum_k w_k = 2$, para poder asegurar que las funciones constantes se integran de manera exacta.

Más aún, la cuadratura de Gauss con n puntos integra de forma exacta polinomios de hasta grado $2n - 1$.

La tabla del Anexo A muestra los valores a usar para aplicar cuadratura de Gauss para distintos valores de n .

Si quiere profundizarse en esta y otras técnicas de integración numérica, se puede consultar [Kin+94].

3.2. FEM: el paso al caso tridimensional

Hasta ahora la explicación se ha reducido al caso unidimensional, para poder explicar las ideas y los conceptos, sin tener la necesidad de entrar en demasiados detalles técnicos. El caso tridimensional presenta una complejidad considerablemente mayor que el visto hasta el momento, pero las ideas de fondo y la filosofía son las mismas. Vamos entonces a repasar cómo funciona el método de los elementos finitos en este caso tridimensional, que, en última instancia, es el que necesitamos usar para el problema que queremos resolver, pero sin entrar en muchos detalles técnicos. El lector interesado en estos detalles puede remitirse a [JJ87], a [ZTZ05] para una mayor concreción o a las referencias más específicas que se mencionen en cada momento.

3.2.1. La EDP lineal elíptica tridimensional

En nuestro caso, nos vamos a restringir al caso lineal, que, si bien no es el más preciso para nuestro problema⁸, sí es el más sencillo y una buena primera aproximación.

Así, la situación es la siguiente. Tenemos un objeto tridimensional, que podemos modelar mediante un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ como en la Figura 3.7, y conocemos las posiciones finales de ciertas partes del objeto, $\vec{u}^g \in \mathbb{R}^3$, la tensión aplicada sobre otras partes, $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ y la fuerza en cada punto $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$.

Además, conocemos la relación constitutiva

$$\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

donde σ_{ij} es el vector de tensión de Cauchy, \mathcal{C} es el tensor de elasticidad de cuarto orden⁹ y ε_{kl} es el vector de presión infinitesimal. Este último se determina mediante la denominada **relación cinemática**¹⁰:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Con esta información, debemos determinar la **función vectorial de desplazamiento** $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que verifica la **relación cuasiestática de equilibrio de tensión**:

$$\sigma_{ij} + \vec{f} = 0 \text{ en } \Omega,$$

⁸Como se hace notar en [AMS00], donde se hace alusión al hecho de que los materiales que componen los tejidos de los senos son incomprensibles, por lo que la aproximación al problema mediante la ecuación de elasticidad lineal no es la mejor elección.

⁹Para más información sobre teoría de tensores pueden consultarse diversos manuales de física, como [Jee15].

¹⁰Consultar sobre relaciones constitutivas en [Hen17] para más información.

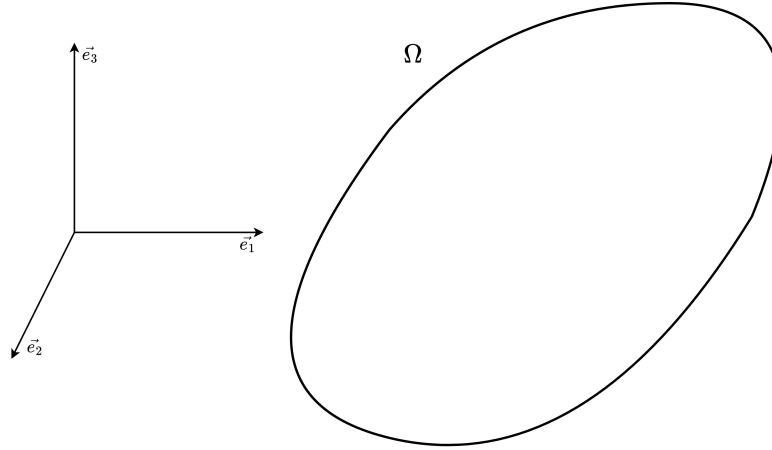


Figura 3.7: Dominio tridimensional.

con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \vec{u} = u_i^g \text{ en } \partial\Omega_{g_i} & \text{Condiciones de Dirichlet} \\ \sigma_{ij}n_j = t_i \text{ en } \partial\Omega_{t_i} & \text{Condiciones de Neumann} \end{cases}$$

siendo $\partial\Omega_{g_i}$ la parte de la frontera en la que imponemos condiciones de Dirichlet en la dirección i y $\partial\Omega_{t_i}$ la parte de la frontera en la que imponemos condiciones de Neumann en la dirección i y n_j la coordenada j -ésima del vector normal a la frontera, n , en cada punto. La frontera del dominio completo debe quedar totalmente cubierta por la unión de estas dos fronteras, $\partial\Omega = \partial\Omega_{g_i} \cup \partial\Omega_{t_i}$, y esto debe darse para cada $i = 1, 2, 3$. Para hacernos una idea, en la Figura 3.8 podemos ver la frontera de Dirichlet en la dirección 1 en rojo y la de Neumann en azul. Esto quiere decir que en la parte roja conocemos la posición final de la componente 1, y de la parte azul conocemos la tensión que experimenta en cada punto en esta misma dirección.

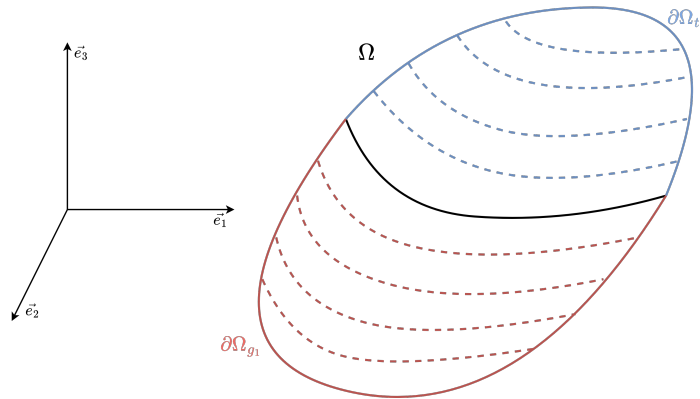


Figura 3.8: Dominio tridimensional, fronteras de Dirichlet (rojo) y de Neumann (azul).

Por otro lado, respecto a \mathcal{C} , podemos expresarla, para materiales isotrópicos¹¹, como

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

siendo δ la delta de Kronecker y λ y μ las denominadas **constantes de Lamé**¹², que pueden ser

¹¹Un material es isotrópico si su comportamiento es el mismo en todas las direcciones.

¹²Para más detalle, consúltese [Sed97]

obtenidas a partir del módulo de Young, E , y el ratio de Poisson, ν , mediante

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ }^{13}.$$

3.2.2. Formulación débil de la ecuación de elasticidad lineal en el caso tridimensional

La formulación débil es la siguiente: dados u_i^g, t_i, f_i , la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ y la relación cinemática $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$, encontrar $u_i \in \mathcal{S} = \{u_i | u_i = u_i^g \text{ en } \partial\Omega_{u_i}\}$, para $i = 1, 2, 3$, tal que para todo $w_i \in \mathcal{V} = \{w_i | w_i = 0 \text{ en } \partial\Omega_{u_i}\}$ para $i = 1, 2, 3$ verifique

$$\int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} dV = \int_{\Omega} w_i f_i dV + \sum_{i=1}^{n_{sd}=3} \int_{\partial\Omega_{t_i}} w_i t_i dS,$$

donde dV indica la integral de volumen, dS la integral de superficie y n_{sd} es el número de dimensiones espaciales, 3 en el caso tridimensional.

Observación 3.2.1. Se puede demostrar, de manera análoga a como demostramos el Teorema 3.1.2, que la formulación fuerte y la débil son equivalentes.

3.2.3. Forma débil finito-dimensional en el caso tridimensional

En este momento, vamos a tratar de obtener la forma final, con la que seremos capaces de aplicar el FEM al problema y obtener una solución aproximada a la real. Como en el caso unidimensional, lo primero que debemos hacer es dividir el dominio en elementos finitos, aunque ahora no es tan sencillo, ya que estamos en el espacio. Hay diferentes formas de hacer esta tarea, pero nosotros optamos por hacerlo mediante hexaedros, es decir, poliedros de 6 lados, ya que de esta forma se obtienen de forma relativamente sencilla y los resultados son razonablemente buenos. Además, la librería que utilizaremos, *deal.II* usa también este tipo de división del dominio. Otra forma de hacerlo es con tetraedros, que puede ser consultada en [JJ87].

Así, dividiremos Ω en distintos elementos finitos en forma de hexaedro (no necesariamente regular), Ω^e , de tal forma que $\bar{\Omega} = \bigcup_e \bar{\Omega}^e$ y dados $e_1 \neq e_2$ se verifica $\Omega^{e_1} \cap \Omega^{e_2} = \emptyset$. La situación queda esquematizada en la Figura 3.9.

Obsérvese que ahora un elemento no tiene únicamente dos nodos, sino que tiene 8, y es importante acordar en qué forma se van a numerar. La numeración elegida¹⁴ es la mostrada en la Figura 3.10.

Está claro, también, que las funciones de la base van a ser más complejas que en el caso unidimensional. No obstante, vamos a ver cómo pueden ser descritas de forma muy simple basándonos en aquellas. En esta ocasión, buscamos funciones básicas que sean lineales en cada una de las tres variables espaciales, es decir, funciones trilineales. La forma más sencilla de hacer esto es tomar como funciones básicas, para $A = 1, \dots, 8$,

$$N^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{N}^{A_1} \cdot \tilde{N}^{A_2} \cdot \tilde{N}^{A_3}, \quad (3.21)$$

donde \tilde{N}^{A_i} son las funciones básicas lineales unidimensionales, que definimos en (3.6). Una forma de saber qué funciones debemos elegir para cada A es usar la codificación en binario de $A - 1$ con

¹³En el denominador no surgen problemas porque el ratio de Poisson verifica $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

¹⁴Esta decisión no es casual, sino que nos basamos en la que se utiliza en la librería *deal.II* ([Arn+21]).

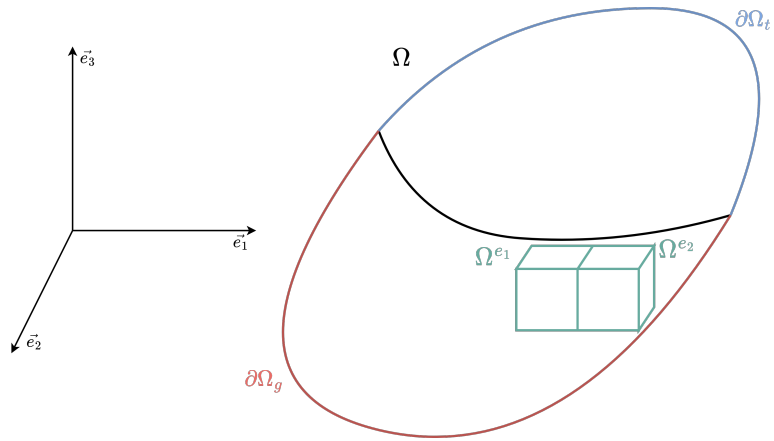


Figura 3.9: Dominio tridimensional, partición en elementos finitos.

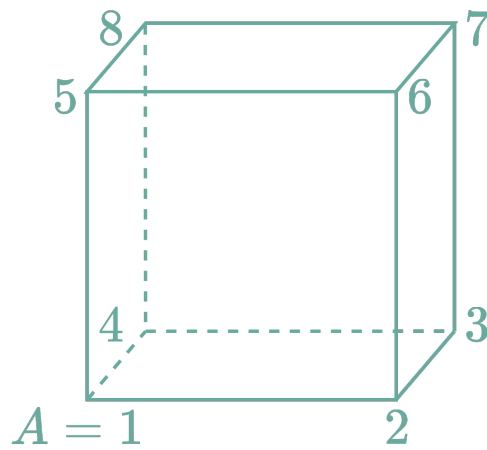


Figura 3.10: Numeración local de los elementos finitos tridimensionales.

los $A_i - 1$. Por ejemplo, para $A = 1$ tomamos $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, porque $A - 1 = 0 = (000)_2 = (A_1 - 1, A_2 - 1, A_3 - 1)_2$.

Al igual que en el caso unidimensional, estas funciones básicas nos permiten aproximar las funciones u_i^h y w_i^h mediante

$$u_{e_i}^h = \sum_{A=1}^{n_{ne}} N^A d_{e_i}^A$$

$$w_{e_i}^h = \sum_{A=1}^{n_{ne}} N^A c_{e_i}^A,$$

donde $d_{e_i}^A$ es la componente i del grado de libertad de $u_{e_i}^h$, en el nodo A local al elemento finito e , y análogamente sucede con $c_{e_i}^A$ como grado de libertad de $w_{e_i}^h$. Esto lo hacemos para $i = 1, 2, 3$, o sea, cada dirección del espacio. Respecto a los gradientes de u_e^h y w_e^h se tiene

$$u_{e_{i,j}}^h = \sum_{A=1}^8 N_{,j}^A d_{e_i}^A$$

$$w_{e_{i,j}}^h = \sum_{A=1}^8 N_{,j}^A c_{e_i}^A.$$

Como en el caso unidimensional, y como puede deducirse de (3.21), tendremos un elemento 'estándar' que transformaremos en cada elemento del dominio según convenga. En esta ocasión, se denomina **dominio triunidad**, y su representación gráfica es como en la Figura 3.11, donde vemos un elemento finito genérico tridimensional en verde y el dominio triunidad en rojo. Como vemos, se define el dominio triunidad como $\Omega^\xi = (-1, 1)^3$.

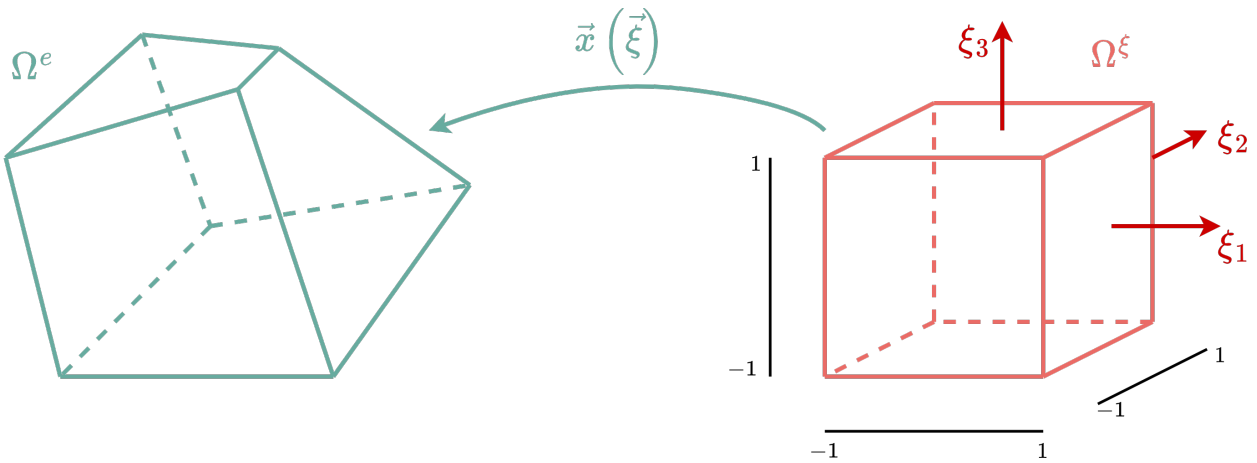


Figura 3.11: Mapeo del dominio triunidad a un elemento finito tridimensional.

También ahora usaremos una formulación isoparamétrica para definir $\vec{x}(\vec{\xi})$:

$$x_{e_i}(\vec{\xi}) = \sum_{A=1}^8 N^A(\vec{\xi}) x_{e_i}^A,$$

definida coordenada a coordenada, para $i = 1, 2, 3$. Además, se calcula el jacobiano de esta función, que denotamos por $J(\vec{\xi})$, con jacobiano de la inversa $J^{-1}(\vec{\xi})$.

La **formulación débil finito-dimensional** en el caso tridimensional puede escribirse como

$$\sum_e \int_{\Omega^e} w_{i,j}^h \mathcal{C}_{ijkl} u_{k,l}^h dV = \sum_e \int_{\Omega^e} w_i^h f_i dV + \sum_{i=1}^3 \sum_{e \in \mathcal{E}_{N_i}} \int_{\partial\Omega_i^e} w_i^h t_i dS,$$

donde \mathcal{E}_{N_i} es el conjunto de elementos finitos que tienen alguna cara en la frontera de Neumann para la dirección i .

Esta expresión, queremos entonces expresarla mediante las funciones básicas, obteniendo, para la parte izquierda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_{i,j}^h \mathcal{C}_{ijkl} u_{k,l}^h dV &= \sum_{A,B=1}^8 c_{ei}^A \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{i,j}^A \mathcal{C}_{ijkl} N_{k,l}^B \det \left(J(\vec{\xi}) \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right) d_{ek}^B \\ &= \sum_{A,B=1}^8 c_{ei}^A K_{ik}^{AB} d_{ek}^B = \sum_{A,B=1}^8 \vec{c}_e^A{}^T K^{AB} \vec{d}_e^B, \end{aligned}$$

siendo K_{ik}^{AB} el resultado de integrar numéricamente la triple integral. Nótese que hay una suma implícita en i y en k , de manera que podemos expresar el término como en la última expresión, en forma matricial. Aquí tenemos que $\vec{c}_e^A, \vec{d}_e^B \in \mathbb{R}^3$ son los vectores que definen cada grado de libertad y K^{AB} es una matriz real de tamaño 3×3 .

De forma análoga, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} w_i^h f_i dV &= \sum_{A=1}^8 c_{ei}^A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^A f_i \cdot \det \left(J(\vec{\xi}) \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \sum_{A=1}^8 \vec{c}_e^A{}^T F^{\text{int}A}, \end{aligned}$$

donde ahora $F^{\text{int}A} \in \mathbb{R}^3$ es el **vector de fuerza interna** que experimenta el nodo A .

Por último, falta el término de la frontera, que reviste bastante complejidad. La frontera es una superficie, no un volumen, por lo que, en esta, realmente debemos analizar las caras de aquellos elementos finitos que estén en la frontera. Es decir, en cada dirección i , debemos considerar los elementos finitos que se encuentren en \mathcal{E}_{N_i} . Dentro de estos, debemos además considerar únicamente aquellas caras que efectivamente pertenecen a la frontera. Para ello, definimos $\mathcal{A}_{N_i}^e$ a los nodos del elemento e que están en la frontera. Además, como estamos trabajando sobre caras de los elementos, tenemos que usar integración de superficie, así como ser capaces de mapear las caras de Ω^ξ a las del elemento Ω^e , como se ilustra en la Figura 3.12. En esta figura vemos a J_s , que es el jacobiano de la transformación entre las caras y tiene dimensión 2×2 , y a \vec{x}_1, \vec{x}_2 , que son las dos direcciones dentro del plano de la cara, cada uno será imagen del par de direcciones que compongan la cara correspondiente en el dominio biunidad.

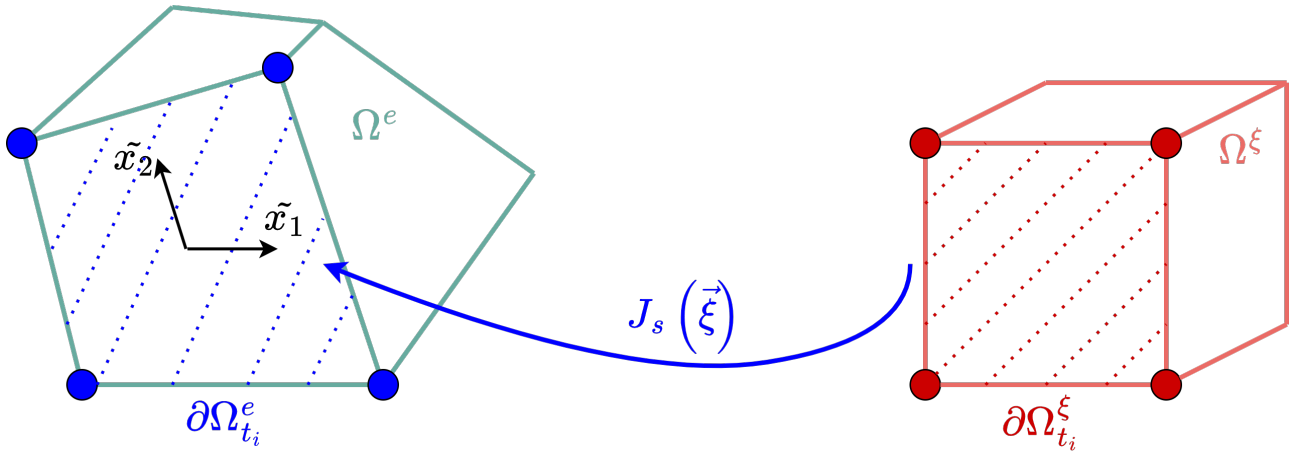


Figura 3.12: Mapeo entre las caras del dominio biunidad a las de un elemento finito de la frontera.

Así, la integral de la tracción puede expresarse como

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{t_i}^e} w_i^h t_i dS &= \sum_{A \in \mathcal{A}_{N_i}^e} c_{e_i}^A \int_{\partial\Omega_{t_i}^e} N^A t_i dS = \sum_{A \in \mathcal{A}_{N_i}^e} c_{e_i}^A \int_{\partial\Omega_{t_i}^\xi} N^A t_i \det(J_s) dS^\xi \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}_{N_i}^e} c_{e_i}^A F_i^{tA}, \end{aligned}$$

donde dS^ξ representa la integral de superficie en la correspondiente cara del dominio biunidad y F_i^{tA} es la componente i del vector de fuerza de tracción en el elemento A . Para unificar esta suma con el resto de la ecuación, definimos

$$\tilde{F}_i^{tA} = \begin{cases} F_i^{tA} & \text{si } A \in \mathcal{A}_{N_i}^e, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por tanto, escribimos

$$\int_{\partial\Omega_{t_i}^e} w_i^h t_i dS = \sum_{A=1}^8 c_{e_i}^A \tilde{F}_i^{tA}.$$

En conclusión, queda

$$\sum_e \sum_{A,B=1}^8 \vec{c}_e^A K^{AB} \vec{d}_e^B = \sum_e \sum_{A=1}^8 \vec{c}_e^A F^{\text{int}A} + \sum_{i=1}^3 \sum_{e \in \mathcal{E}_{N_i}} \sum_{A=1}^8 c_{e_i}^A \tilde{F}_i^{tA}.$$

Al ensamblar los operadores, aplicar las condiciones de frontera de Dirichlet para cuadrar las dimensiones y expresar todo en notación matriz-vectorial, obtenemos finalmente

$$\vec{c}^T \tilde{K} \tilde{d} = \vec{c}^T \left(F^{\text{int}} + F^{\vec{t}} - \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \sum_{A \in \mathcal{A}_D^e} \vec{d}_e^A K_e^A \right),$$

donde denotamos por \mathcal{E}_D a los elementos con condiciones de Dirichlet y \mathcal{A}_D^e a los nodos de dichos elementos que presentan este tipo de condiciones. Así, \tilde{d} es el vector resultante de quitar todos los

grados de libertad con frontera de Dirichlet, y \tilde{K} la matriz resultante de eliminar las correspondientes columnas. Esta información es conocida y la pasamos al lado derecho. Por último, definimos el **vector global de fuerza** mediante

$$\tilde{F} = F^{int} + F^{\vec{t}} - \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \sum_{A \in \mathcal{A}_D^e} \vec{d}_e^A K_e^A$$

y ya podemos resolver el problema como

$$\tilde{d} = \tilde{K}^{-1} \tilde{F}.$$

Capítulo 4

Análisis de Objetivos y metodología

4.1. Objetivos

Con este trabajo de fin de grado buscamos comprender y desarrollar un modelo en elementos finitos simplificado para las deformaciones del tejido mamario, de forma que, partiendo de un escáner inicial proporcionado como dato, pueda realizarse una simulación de las deformaciones experimentadas por el pecho al cambiar la posición de la paciente. En esta sección desgranaremos este objetivo en sus componentes fundamentales, explicando el por qué de cada una de ellas.

4.1.1. Preprocesamiento de los datos

La empresa Cella Medical Solutions es capaz de modelar, a partir de una tomografía 3D, la morfología de los pechos de una mujer con muy buena precisión. Son capaces de segmentar los distintos tejidos que componen el pecho, desde grasa y vasos sanguíneos, hasta un posible tumor encontrado en la mamografía. Al realizar este proceso, generan una serie de archivos en formato STL, de forma que cada uno de estos archivos modela uno de los tejidos encontrados en el escáner.

Para nuestro propósito, simplificaremos toda esta información, centrándonos únicamente en el tejido adiposo, que nos proporciona la forma superficial de las mamas en el escáner. Nos quedaremos, además, con una única mama, para disminuir el tiempo de cómputo.

Además, se debe conseguir modelar el pecho como un volumen sólido, para poder aplicar correctamente el método de los elementos finitos. Esto no es trivial, pues debemos convertir un STL, que modela una superficie hueca, en otro formato que nos permita modelar también el volumen interior. El formato elegido será, como veremos, el formato VTK.

4.1.2. Creación de unos datos ideales de experimentación

Es interesante, además de considerar las mamografías reales, considerar un modelo simple que nos permita efectuar diversas pruebas en la configuración de los parámetros del sistema. De esta manera podremos comprender mejor cómo funciona el método, así como el efecto de cada parámetro del modelo.

4.1.3. Desarrollo de un módulo de simulación del efecto de la gravedad mediante un modelo de elementos finitos

Una vez disponemos del modelo inicial de la mama, discretizado, debemos ser capaces de simular cómo se deforma al cambiar la posición de la paciente. Nos centraremos en el desarrollo de un módulo que permita fijar la pared de la mama, lo que sería el tórax, y aplicar la fuerza de la gravedad tanto en posición de pie, con la gravedad en paralelo a esta pared, como en posición acostada boca arriba, de forma que la gravedad actuará en la perpendicular a la pared del tórax.

4.1.4. Visualización de los resultados

En este problema es particularmente interesante la visualización de los resultados. No desarrollaremos ninguna herramienta para este propósito, pero es conveniente seleccionar adecuadamente la herramienta que se utilizará para esta cuestión.

4.2. Metodología

Este proyecto, como habrá notado el lector llegado a este punto, es un punto de convergencia de diferentes ramas de la ciencia, como lo son la medicina, la física, las matemáticas y la ingeniería informática. Por lo tanto, el desarrollo del mismo no ha constado únicamente de dedicar tiempo a programar frente al ordenador, sino que ha consistido en un largo proceso de comprensión del problema y de las soluciones disponibles. El método de los elementos finitos tiene una fundamentación matemática sólida y compleja, como se puede notar en el Capítulo 3. Su entendimiento no fue, tampoco, nada sencillo, y debo mencionar [Gar], un curso online de la Universidad de Michigan que ofrece lo que es, a mi juicio, una brillante exposición del tema. Por otro lado, las cuestiones físicas y médicas del tema me han llevado a preguntar a diversos conocidos con conocimientos más profundos que los míos en estas materias.

Así, el trabajo realizado es una tarea de comprensión, análisis, documentación, reuniones, reflexión, búsqueda de alternativas, diseño y desarrollo de la solución, pruebas, errores, frustraciones y alegrías.

4.3. Herramientas utilizadas

Para poder llevar a cabo el trabajo, he utilizado de distintas herramientas de software, que voy a describir brevemente:

- **deal.II**, [Arn+21]: es una librería de código abierto para C++, enfocada a facilitar el desarrollo de programas que utilicen el método de los elementos finitos, y ha sido un componente clave del proyecto, pues con las funciones de esta librería hemos desarrollado el programa que permite hacer las simulaciones que requiere el problema.
- **FreeCAD**, [RMH]: es un programa de código abierto para modelado 3D. Es ampliamente utilizado para modelar objetos del mundo real, desde pequeños componentes electrónicos, hasta edificios y proyectos de ingeniería civil. Lo hemos utilizado para el preprocesado de la mamografía. Concretamente, nos ha permitido extraer las mamas separadamente al modelo completo.
- **MeshLab**, [Cig+08]: es otro programa de código abierto para modelado 3D, especializado en superficies trianguladas. Tiene un conjunto de herramientas que permiten la edición, limpieza, arreglo, inspección, renderizado y texturizado de superficies tridimensionales. Ha sido utilizado

también en la etapa de preprocesamiento, para hacer que la mama aislada obtenida anteriormente quede como una superficie completamente cerrada.

- **MatLab**, [MAT22]: es una plataforma de programación centrada en cálculo numérico, estadística y análisis de datos. Lo hemos utilizado para desarrollar un pequeño programa que, dado un archivo STL que describe una superficie cerrada, escribe un archivo VTK en el que se describe mediante hexaedros el interior de la superficie. Este programa, por tanto, sirve para pasar la superficie cerrada de la mama a la descripción de esta mediante un sólido.
- **Paraview**, [Aya15]: es una aplicación de código abierto centrada en el análisis de datos y su visualización. La utilizamos para visualizar los resultados finales obtenidos mediante el módulo de simulación desarrollado.

Capítulo 5

Diseño y resolución de la solución

Según hemos explicado, el flujo de trabajo es como en la Figura 5.1, donde se distinguen la parte de trabajo externo al proyecto, que nos viene dada por la empresa, y la parte desarrollada por nosotros. Vamos a ver cada etapa detalladamente.

5.1. Recopilación de datos médicos

Este proceso se refiere a la obtención de escáneres médicos por parte del centro médico a través de su maquinaria especializada para este propósito, en este caso, el mamógrafo.

5.2. Modelado 3D

Esta tarea la realiza Cella Medical Solutions a partir de los datos proporcionados por el centro médico. Con las mamografías obtenidas son capaces de hacer reconstrucciones muy detalladas de toda la morfología del pecho de la paciente. Estos modelos se guardan digitalmente, utilizando el formato de archivos STL, que permite modelar la superficie de los distintos tejidos a través de una triangulación de la misma.

Este modelo 3D es el que se nos proporciona a nosotros para trabajar a partir de él. En concreto, nos fueron proporcionados por el CTO de la compañía, Miguel Rodríguez.

5.3. Preprocesamiento

Como explicamos en la sección de herramientas utilizadas¹, usamos la librería deal.II para implementar la simulación física mediante el método de los elementos finitos. Esta librería requiere, para poder trabajar, conocer el interior del cuerpo sobre el que trabaja. Como desde la empresa nos proporcionan la superficie que recubre el tejido, debemos idear una manera de transformar esta superficie en un volumen aceptable por la librería.

Además, dada la complejidad computacional del método de los elementos finitos, y siendo conscientes de que el tiempo de cómputo aumenta mucho al incrementar la cantidad de nodos a considerar, hemos decidido estudiar únicamente un seno, separado del torso, ya que la parte del torso simplemente quedará quieta, consumiendo tiempo y sin aportar información relevante. Para hacer

¹Véase la Sección 4.3.

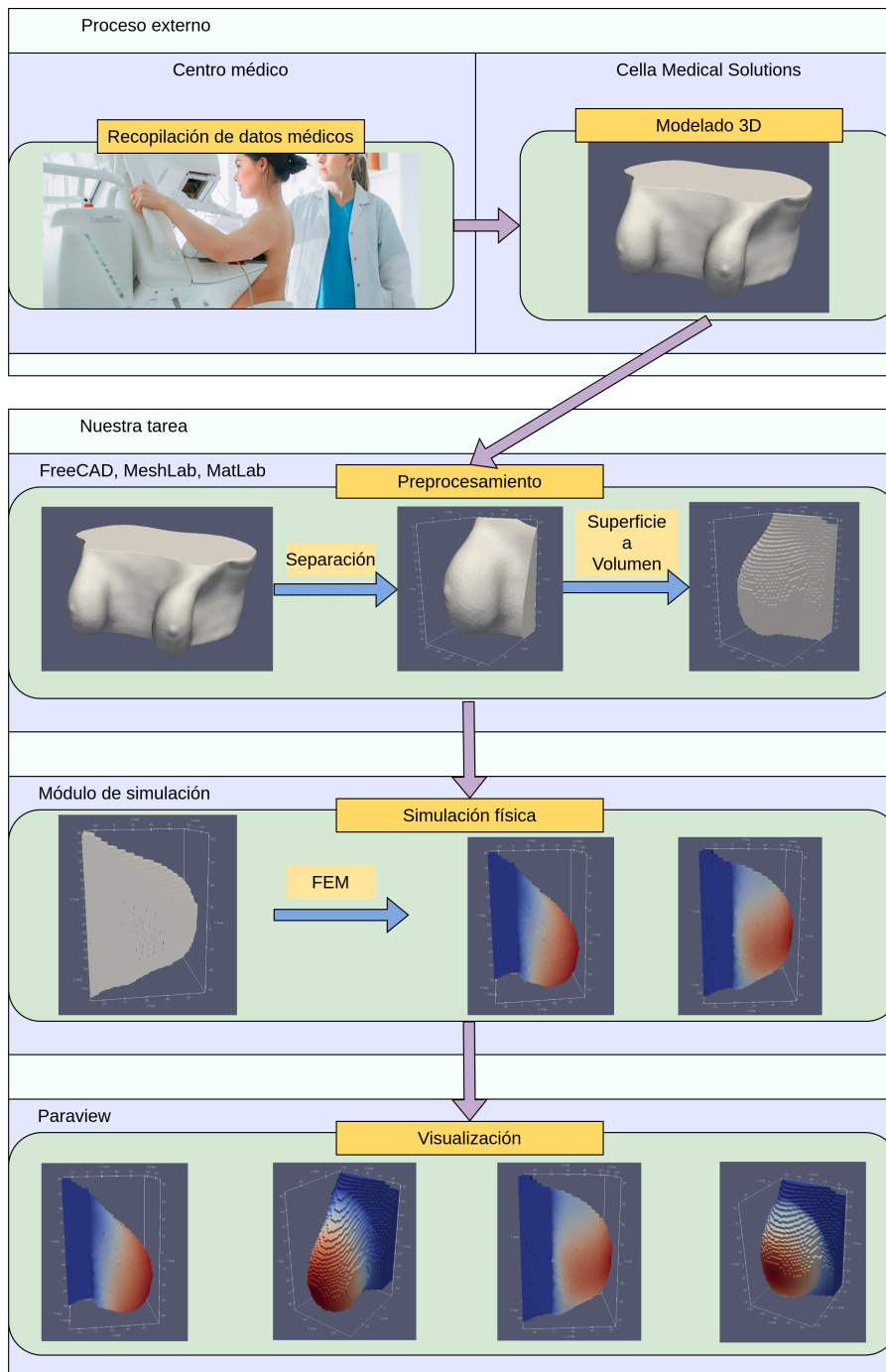


Figura 5.1: Flujo de trabajo del proyecto.

esa separación, utilizamos FreeCAD para separar la parte de la malla correspondiente a una mama y MeshLab para cerrar el modelo y que quede una superficie cerrada, en caso de que quede alguna cara sin cerrar. El proceso de separación puede visualizarse en la Figura 5.2, donde se ve la figura con la que nos quedamos tras cada recorte sucesivo utilizando FreeCAD. En el caso en que la frontera queda agujereada tras los cortes, lo que sucedía en algunas pruebas, puede utilizarse MeshLab para completarla.

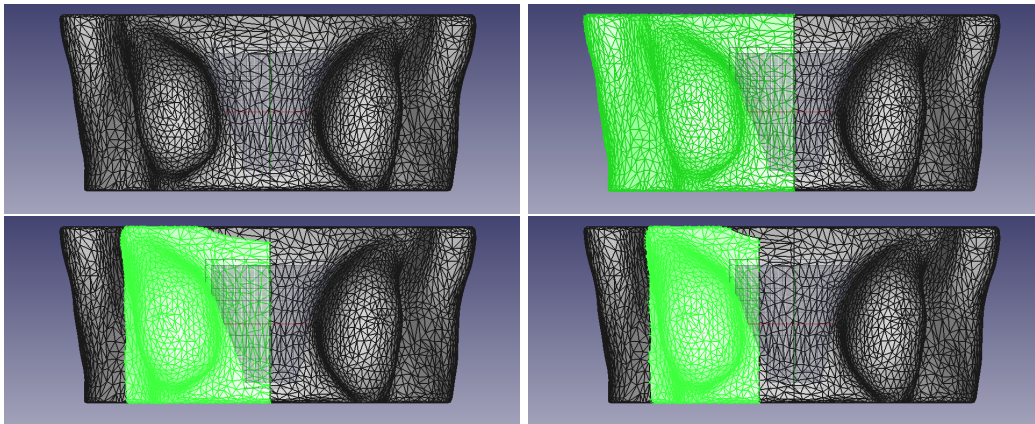


Figura 5.2: Proceso de separación de una mama a partir del STL inicial.

En Cella Medical Solutions modelan la mamografía mediante archivos STL, estos son archivos de texto que describen la geometría de un objeto tridimensional. Para ello, se componen de:

- Un conjunto de puntos, mostrando las tres coordenadas de cada punto y un punto por línea.
- Un conjunto de triángulos, indicando los índices correspondientes a las líneas en las que se describen sus tres vértices.

Por ejemplo, para modelar el triángulo con vértices en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, un STL sería (obviando cabeceras y otras consideraciones técnicas):

```

1 POINTS
2 0.0 0.0 0.0
3 1.0 0.0 0.0
4 0.0 0.0 1.0
5
6 TRIANGLES
7 0 1 2

```

Listado de código 5.1: Esqueleto básico del formato STL.

Mediante una descripción de este tipo, y tras aplicar el proceso de separado de una mama, obtenemos un objeto como el de la Figura 5.3.

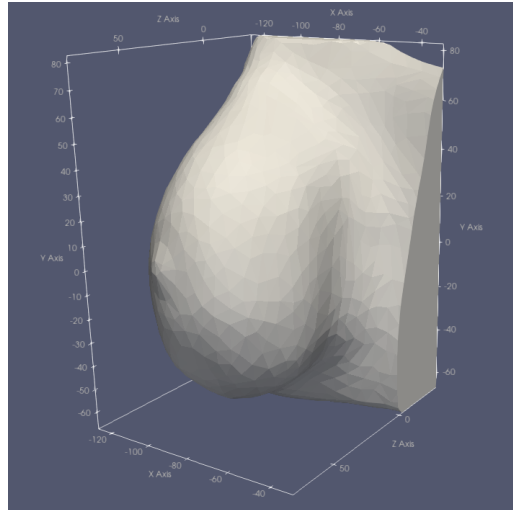


Figura 5.3: Objeto que representa la mama derecha de la mamografía proporcionada por Cella Medical Solutions, en formato STL.

La librería `deal.II` requiere la descripción explícita del interior de los objetos, indicando los volúmenes que la componen. Para este propósito, podemos utilizar el formato de archivo VTK, que sigue el mismo principio que el formato STL, aunque introduce la definición de objetos tridimensionales, como tetraedros y hexaedros. Para definir un hexaedro, debemos indicar las líneas de sus 8 vértices.

La conversión de un formato a otro, no obstante, no es directa. Más aún, no hemos encontrado ningún programa capaz de hacerlo, por lo que hemos desarrollado un programa de Matlab para esta tarea, `closed_stl_to_vtk.m`. El programa sigue el siguiente proceso:

```

1 closed_stl_to_vtk(STL surface, int nX, int nY, int nZ):
2   Voxelizar surface en una malla de nX x nY x nZ
3   Crear output.vtk
4   Escribir en output.vtk todos los puntos de la malla
5   Escribir en output.vtk, para cada voxel interior a surface,
6     una línea indicando sus 8 vértices

```

Listado de código 5.2: Pseudocódigo del programa que crea un volumen en formato VTK a partir de una superficie cerrada en formato STL.

El primer paso, de voxelizado, no es trivial, y para hacerlo hemos utilizado una función escrita por la comunidad de Matlab para este cometido, cuya documentación se puede consultar en [Ait22]. Este aplica el algoritmo de voxelizado mediante *raytracing*, cuyo fundamento explicó magistralmente mi compañero Antonio Mangas en su trabajo de fin de grado, [Man20].

Así, pasamos el STL de la mama separada del torso a este programa, obteniendo el archivo VTK final cuyo comportamiento queremos simular. Es decir, transformamos el objeto de la Figura 5.3 en el de la Figura 5.4.

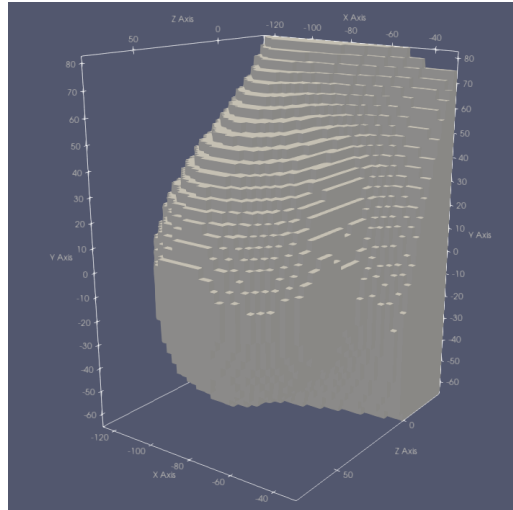


Figura 5.4: Objeto que representa el volumen interior de la mama derecha de la mamografía, en formato VTK.

5.4. Simulación física

Para realizar las simulaciones físicas, hemos desarrollado en C++ un módulo de simulación utilizando la librería deal.II, como se ha comentado. Esta librería nos permite liberarnos de muchas de las complejidades del método de los elementos finitos, como el tener que definir los mapeos desde el dominio triunidad a los elementos finitos o el llevar cuenta de los grados de libertad. Además, permite realizar operaciones con matrices dispersas, lo que es muy útil para calcular la inversa de la matriz de rigidez, y escribir los resultados en distintos formatos de forma directa.

Además, implementa funciones de creación de algunos dominios simples, lo cual vamos a utilizar para hacer un estudio de la influencia de los parámetros en la simulación. Para ello, vamos a definir una semiesfera, que actuará a modo de 'mama ideal' y con la que haremos simulaciones utilizando diferentes valores del módulo de Young, E , y del ratio de Poisson, ν .

El módulo de simulación puede resumirse como en el pseudocódigo del Listado de código 5.3.

```

1 simulacion(VTK dominio, double E, double nu):
2   Generar modelo en elementos finitos a partir de dominio
3   Definir condiciones de frontera
4   Inicializar K,F,D y los grados de libertad
5   Calcular Klocal y Flocal y ensamblarlas en K y F
6   Solucionar  $D=K^{-1}*F$ 
7   Generar salida en formato VTK

```

Listado de código 5.3: Pseudocódigo del módulo de simulación.

5.4.1. Generación del modelo

Debemos generar el modelo y asignárselo al objeto *triangulation*, de tipo *Triangulation<dimension>* que utiliza deal.II para modelar el dominio. Para hacerlo, simplemente leemos el archivo VTK mediante la función *triangulation.read_vtk(string filename)*, que lee un archivo en este formato y crea el modelo en elementos finitos definido por los volúmenes que forman el objeto.

Por otro lado, para generar la semiesfera que utilizaremos para las pruebas de variaciones de

parámetros, utilizamos la función `GridGenerator::half_hyper_ball(Triangulation<dimension>triangulation, Point<dimension>centro, double radio)`, que genera una semiesfera en dimensión *dimension* de centro *centro* y radio *radio*. La semiesfera es como en la Figura 5.5.

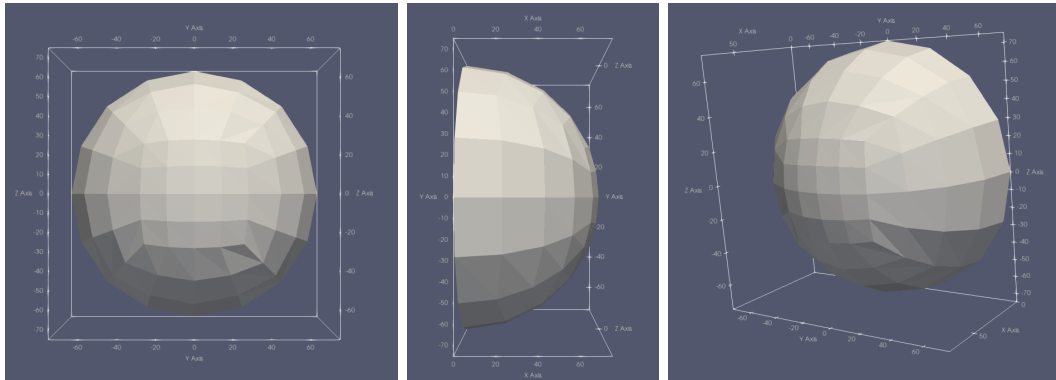


Figura 5.5: Semiesfera que usamos para realizar un análisis de la influencia de los parámetros.

5.4.2. Definición de las condiciones de frontera

En este paso simplemente fijamos a 0 el valor de la solución en aquellos puntos que queremos que permanezcan fijos. En nuestro caso, la pared de la mama o la base de la semiesfera.

5.4.3. Inicialización de variables

Ahora inicializamos las variables que usaremos para la simulación. F es el vector de fuerza, D es el vector de desplazamiento en el que quedará la solución final y K es la matriz de rigidez, definida como una matriz dispersa².

5.4.4. Cálculo de Klocal y Flocal y ensamblaje de K y F

Para realizar el cálculo de Klocal y Flocal, debemos integrar numéricamente las correspondientes integrales. Para hacerlo, hacemos uso de la funcionalidad de la librería deal.II a este respecto, que permite definir los puntos de cuadratura y sus pesos, así como las funciones de la base. De esta forma, solo debemos hacer un cálculo como el del Listado de código 5.4, donde se observa también cómo se ensamblan los resultados para formar las matrices de rigidez y de fuerza globales.

```

1  for(; elem!=endc; ++elem){
2      //Actualizamos el elemento actual
3      fe_values.reinit(elem);
4
5      //Obtenemos la matriz de conectividad de este elemento
6      elem->get_dof_indices(local_dof_indices);
7
8      //Comenzamos a obtener Klocal
9      //La inicializamos a 0
10     Klocal = 0.;
11
12     //Iteramos sobre los grados de libertad locales y los puntos de cuadratura
13     for(unsigned int q=0; q<num_quad_pts; ++q){
14         //Evaluamos K^{A,B}_{i,k}
15         for(unsigned int A=0; A<nodes_per_elem; A++){
16             for(unsigned int i=0; i<dim; i++){

```

²deal.II dispone del tipo `SparseMatrix<double>`.


```

17     for(unsigned int B=0; B<nodes_per_elem; B++){
18     for(unsigned int k=0; k<dim; k++){
19     for(unsigned int j=0; j<dim; j++){
20     for(unsigned int l=0; l<dim; l++){
21         //Por la numeración de deal.II, que guarda los tres grados de
libertad de cada nodo seguidos,
22         //se tiene que el grado de libertad i del nodo A será el nodo 3*A+i
23         Klocal[3*A+i][3*B+k] +=
24         fe_values.shape_grad(3*A+i,q)[j]
25         *C(E,nu,i,j,k,l)
26         *fe_values.shape_grad(3*B+k,q)[l]
27         *fe_values.JxW(q);
28     }}}}}
29
30     //Y ahora con Flocal
31     Flocal = 0.;
32
33     //La función force no es más que la fuerza de la gravedad
34     Vector<double> force(dim);
35     for(int i=0; i<dim; i++)
36         force[i] = gravity[i];
37
38     for(unsigned int f=0; f<faces_per_elem; f++){
39     for(unsigned int q=0; q<num_quad_pts; ++q){
40     for(unsigned int A=0; A<nodes_per_elem; A++){
41     for(unsigned int i=0; i<dim; i++){
42         Flocal[3*A+i] +=
43         fe_values.shape_value(3*A+i,q)
44         *force[i]
45         *fe_values.JxW(q);
46     }}}
47
48     //Ahora los ensamblamos en la matriz K y vector F globales
49     for(unsigned int i=0; i<dofs_per_elem; i++){
50         F[local_dof_indices[i]] += Flocal[i];
51         for(unsigned int j=0; j<dofs_per_elem; j++){
52             K.add(local_dof_indices[i],local_dof_indices[j],Klocal[i][j]);
53         }
54     }
55 }

```

Listado de código 5.4: Fragmento de código para obtener Klocal, Flocal, K y F.

Como vemos, lo único que se hace es, para cada elemento, evaluar cada elemento del sumatorio de la fórmula de cuadratura para realizar la integral en cada punto de cuadratura, tanto para Klocal, como para Flocal. Posteriormente, se van añadiendo a las posiciones correspondientes de F y K globales, aunque en K se añaden con la función *add(int i, int j, double valor)*, que hace $K[i,j] += valor$ en una matriz dispersa.

5.4.5. Solución

Para obtener la solución, únicamente debemos resolver $K*D=F$, lo que se hace mediante la función de deal.II *K.vmult(D,F)*, que hace esto mismo.

5.4.6. Generar el archivo de salida

Para generar el archivo de salida, nos valemos de la función *data_out.write_vtk(sdt:ofstream output)*, que escribe en *output* los contenidos de *data_out*, en formato VTK. Previamente, hemos

introducido en `data_out` la información sobre el dominio inicial y la solución obtenida.

5.5. Análisis de los resultados obtenidos

Vamos a visualizar los resultados obtenidos, comenzando por el análisis paramétrico utilizando la semiesfera como dominio de simulación. Como parámetros, tomaremos $E \in \{18000, 20000, 22000\}$, recogiendo los valores del rango de la tabla 2.1. Para el ratio de Poisson, en [DBS17] utilizan para este un valor de 0'48, por lo que tomamos $\nu \in \{0'28, 0'48, 0'68\}$, tres valores muy distintos, que permiten comprobar el distinto comportamiento derivado de esta variación.

Finalmente, aplicaremos al modelo real de la mamografía los valores que estos artículos proporcionan como los más exactos para E y ν , que son 20kPa y 0'48, respectivamente.

5.5.1. Resultados utilizando el modelo idealizado

En la Figura 5.6 vemos los resultados obtenidos al simular que la mujer está de pie, aplicando la gravedad en dirección paralela al torso. El color indica la cantidad de desplazamiento relativo (respecto de toda la figura) de cada punto, yendo desde azul marino (desplazamiento nulo) hasta rojo pasión (la máxima cantidad de desplazamiento). Esto lo hacemos fijando $E = 18kPa$ y variando ν entre los tres valores a estudiar. Como puede observarse, las dos primeras combinaciones de valores presentan resultados razonables, diferenciándose en que el primero queda en una forma algo más abombada y que el segundo presenta la zona roja más amplia, lo que quiere decir que el área de mayor desplazamiento es mayor en este segundo caso. Por otro lado, los resultados obtenidos para $\nu = 0'68$ son aberrantes y este fenómeno sucede para todos los valores de E considerados, por lo que es bastante claro que este valor de ν no va a ser útil para estudiar nuestro problema y de aquí en adelante nos centramos en los otros dos valores considerados.

Vamos a ver, entonces, qué sucede en la simulación al fijar ν a cada uno de estos valores, y variar el valor de E . En la Figura 5.7 pueden verse los resultados. En este caso, se pueden apreciar en todos los casos resultados razonables, aunque vemos que la zona roja disminuye al aumentar E . Esto concuerda con lo que dice la teoría, pues un mayor valor de E significa una mayor rigidez del cuerpo modelado y, por tanto, un menor desplazamiento.

Así, vemos como el modelo funciona de forma razonablemente correcta. Veamos ahora qué sucede al tratar de simular que la mujer se acuesta en una camilla boca arriba, de tal forma que la gravedad actúa en la dirección perpendicular al tórax. Como antes, comenzamos fijando E y variando ν . Los resultados se muestran en la Figura 5.8, donde vemos, de nuevo, un comportamiento relativamente realista de los valores bajos de ν y, para el tercer valor, un comportamiento curioso, donde parece que la semiesfera se abre mucho más hacia afuera de lo que se contrae hacia su base. También se observa que en esta ocasión el área de mayor desplazamiento es mayor para $\nu = 0'28$ que para $\nu = 0'48$, lo que parece indicar que el parámetro ν afectará al comportamiento del sistema junto con las fuerzas aplicadas, como la gravedad, y no de forma autónoma.

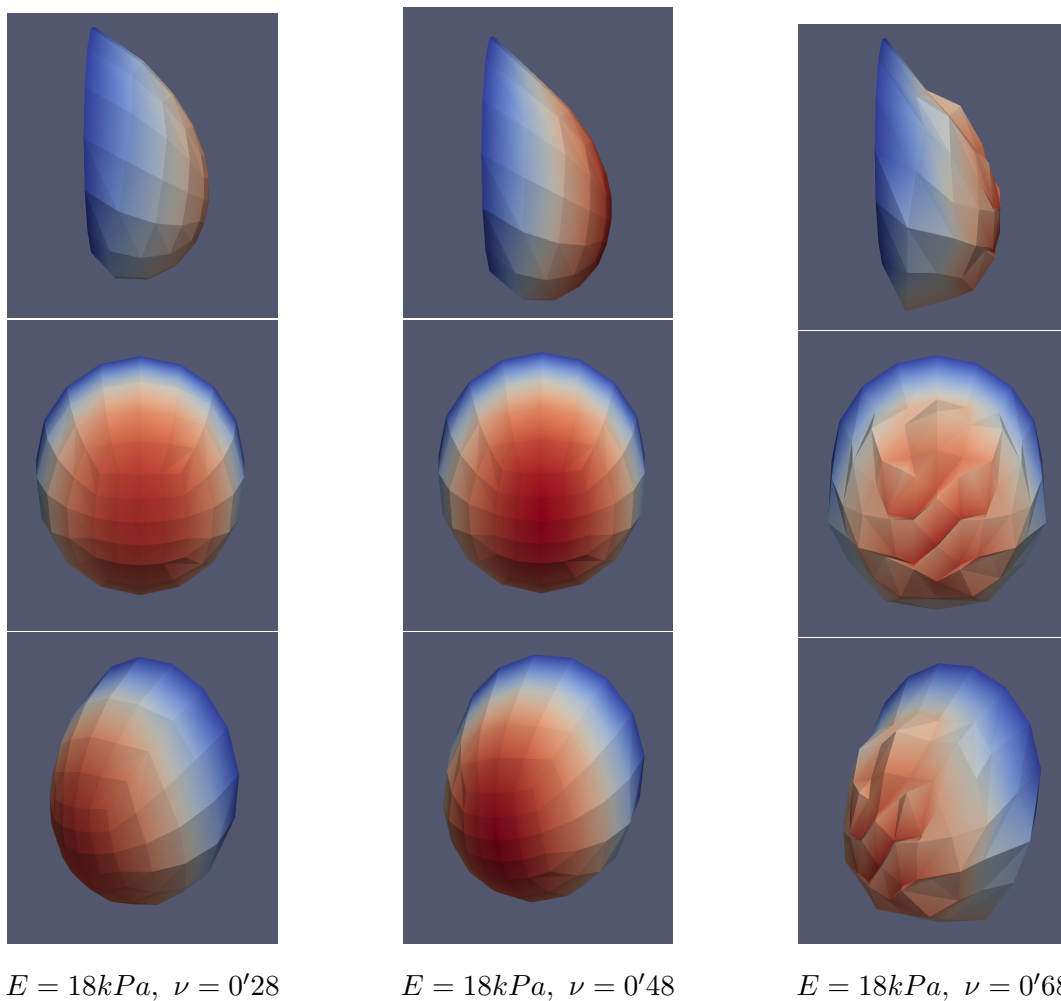
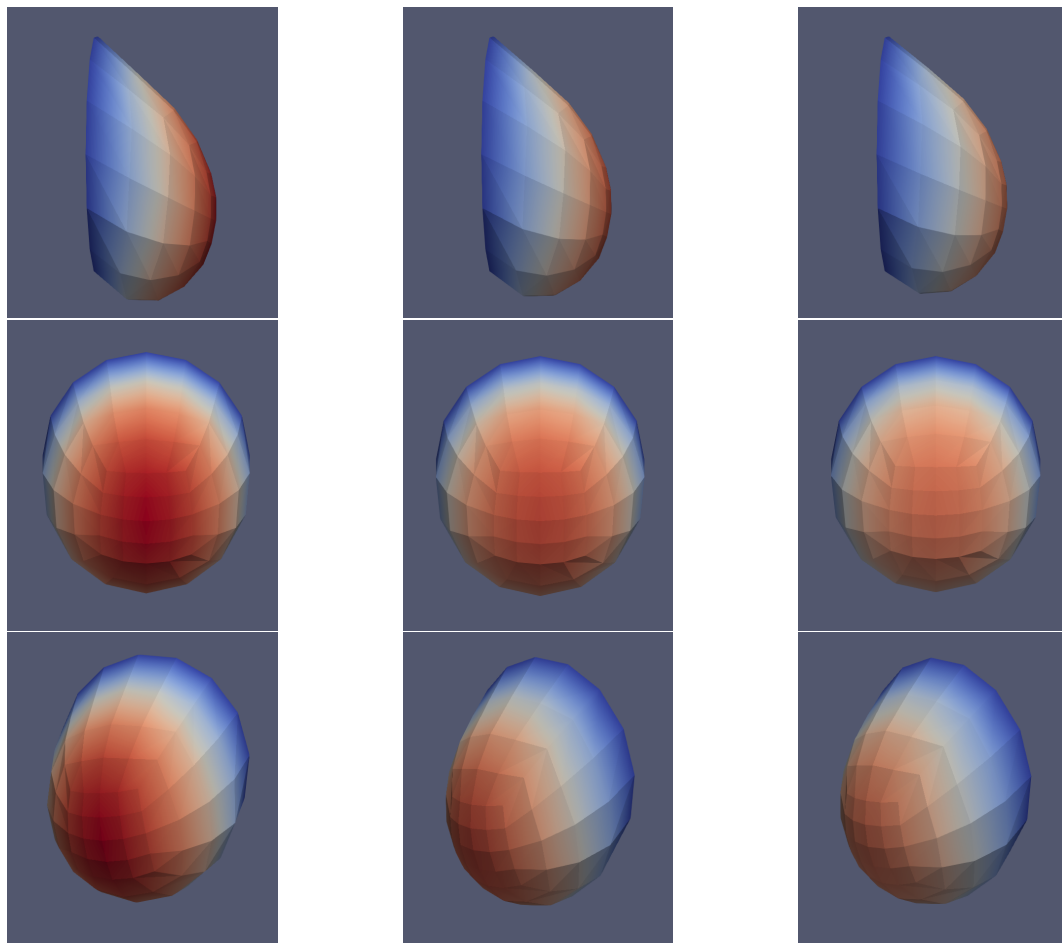


Figura 5.6: Simulación con el dominio ideal, $E = 18kPa$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.



$$E = 18kPa, \nu = 0'48$$

$$E = 20kPa, \nu = 0'48$$

$$E = 22kPa, \nu = 0'48$$

Figura 5.7: Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0'48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.

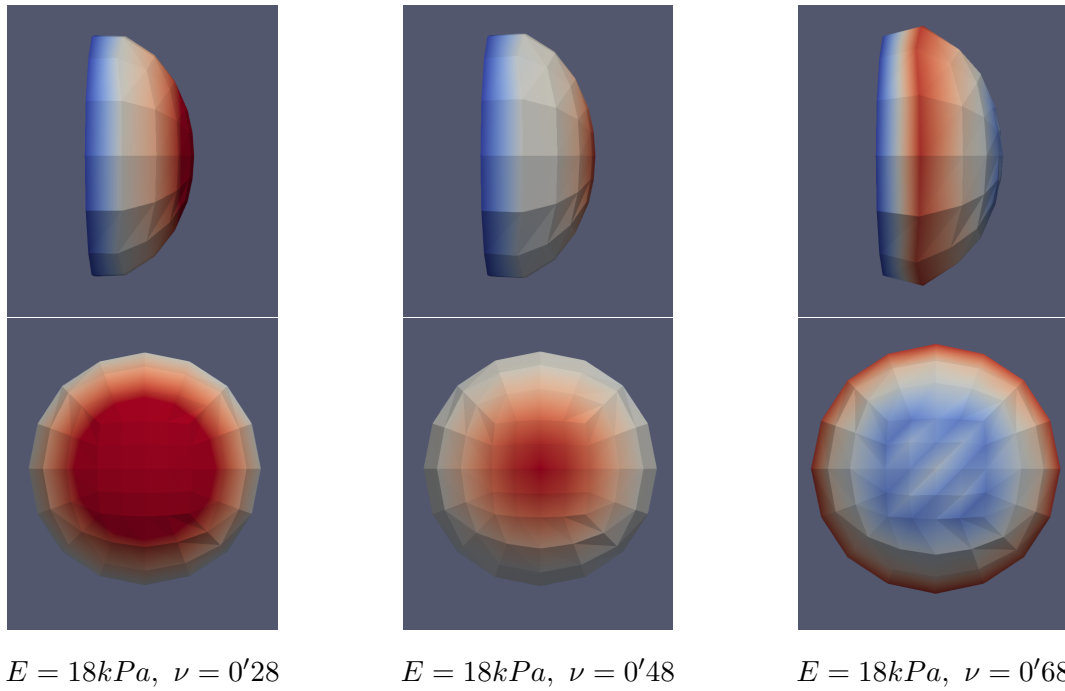


Figura 5.8: Simulación con el dominio ideal, $E = 18kPa$ fijo y variando ν . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso.

En la Figura 5.9 se muestran los resultados de, como antes, fijar ν y variar E y, como antes, se obtienen resultados similares, y se observa que al aumentar E disminuye la elasticidad del dominio.

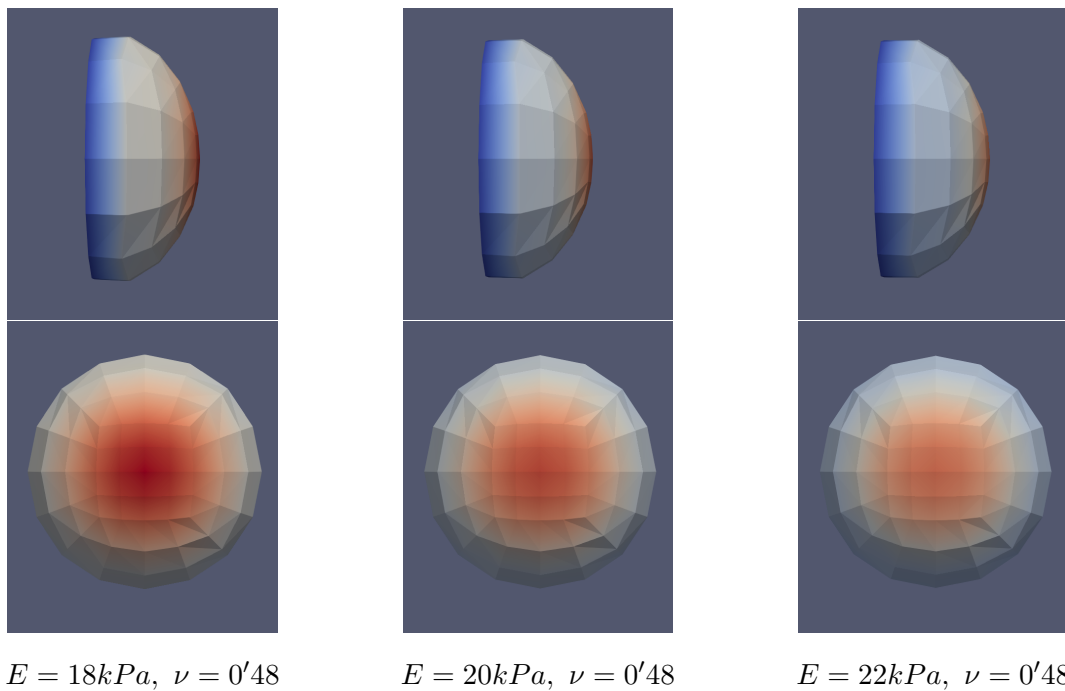


Figura 5.9: Simulación con el dominio ideal, $\nu = 0.48$ fijo y variando E . La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada, perpendicular al torso.

5.5.2. Resultados utilizando el modelo de la mamografía

Pasamos, por último, a estudiar qué sucede al efectuar las simulaciones con el modelo de la mamografía real. Para ello, hemos voxelizado la mama derecha de la mamografía proporcionada por Cella Medical Solutions, con una resolución de $40 \times 40 \times 40^3$ y valores para los parámetros de $E = 20kPa$ y $\nu = 0.48$. Al aplicar la gravedad como si la mujer estuviese de pie, se obtienen los resultados de la Figura 5.10. Puede observarse que el modelo capta bien la aplicación de la fuerza de la gravedad y que, como es esperable, sea la zona más alejada del tórax la que más afectada se vea por esta fuerza. Los resultados, de esta manera, son prometedores. No obstante, al no disponer de un modelo final con el que poder ser comparados, es difícil dar una sentencia sobre la efectividad del modelo.

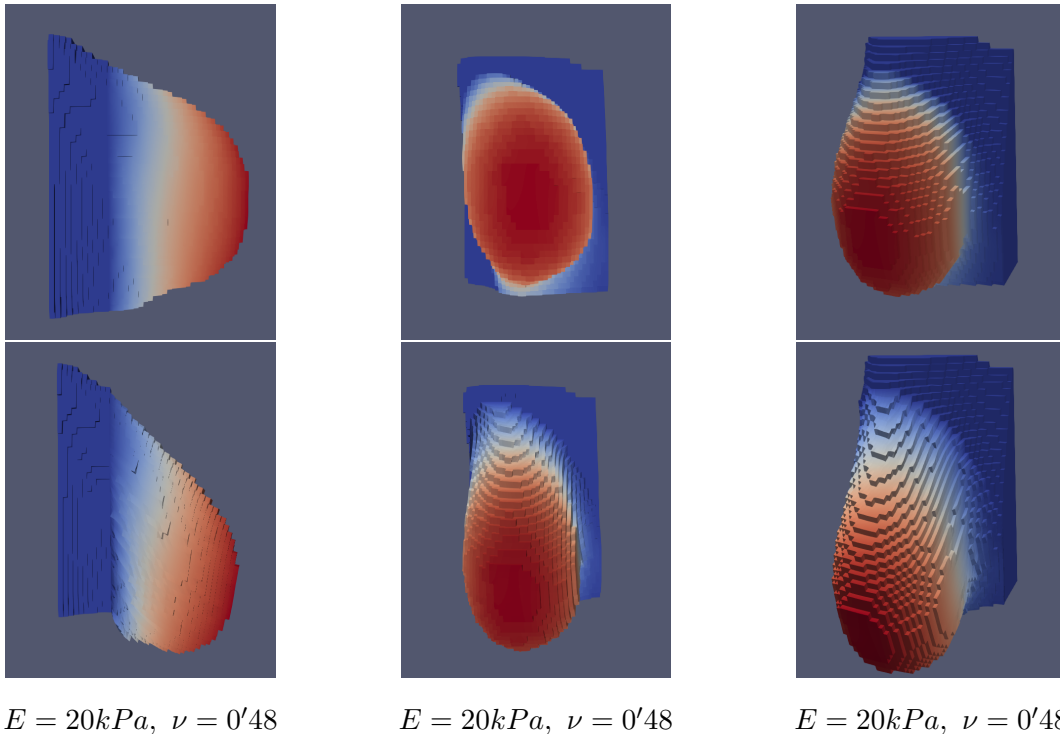


Figura 5.10: Simulación con el modelo de la mama, $E = 20kPa$, $\nu = 0.48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese de pie, paralela al torso.

En la parte de arriba se encuentra el modelo original, y en la de abajo el resultado tras la simulación. De izquierda a derecha vemos las vistas lateral, frontal y oblicua, en ese orden. Nótese que en el modelo original se ve la coloración que indica la cantidad de movimiento tras la simulación, aunque en este, claro está, no hay ningún desplazamiento. Decidimos mostrarlo así porque en un color sólido no se aprecian muy bien las formas.

Finalmente, en la Figura 5.11, vemos la aplicación de la gravedad en la dirección perpendicular al tórax, simulando que la mujer queda acostada boca arriba. Puede observarse como la mama se contrae hacia el tórax, de nuevo capturando adecuadamente las intenciones de la simulación, aunque, de nuevo, no podemos dar una medida de la efectividad del modelo, pues carecemos de una solución real con la que realizar las comparaciones pertinentes.

Vemos, así, que hemos conseguido modelar la deformación experimentada por la mama, com-

³Se intentaron hacer pruebas con mayor densidad de voxelización, pero la simulación requería más memoria de la que teníamos disponible en el contenedor de Docker donde se realizaron las simulaciones.

pletando el principal y más importante objetivo de los planteados en la gestación del proyecto. No obstante, modelamos la mama como un objeto totalmente uniforme, lo que no permite localizar el tumor tras la simulación. Este problema no hemos podido abordarlo porque conlleva añadir otro pedacito más de complejidad al proyecto, que nos parecía, tal y como está, suficientemente completo. Para poder realizar la localización del tumor, debemos voxelizar tanto la mama completa como el tumor, identificando dónde queda este dentro de aquella. Además, debemos encontrar la forma de ser capaces de que, una vez que deal.II lea el modelo, ser capaces de distinguir el tipo de tejido de cada elemento, de forma que podamos definir en función de este los valores del módulo de Young y del ratio de Poisson. Además, se debe de estudiar cómo generar el archivo de salida de manera que en este también se distinga el tejido tumoral del resto.

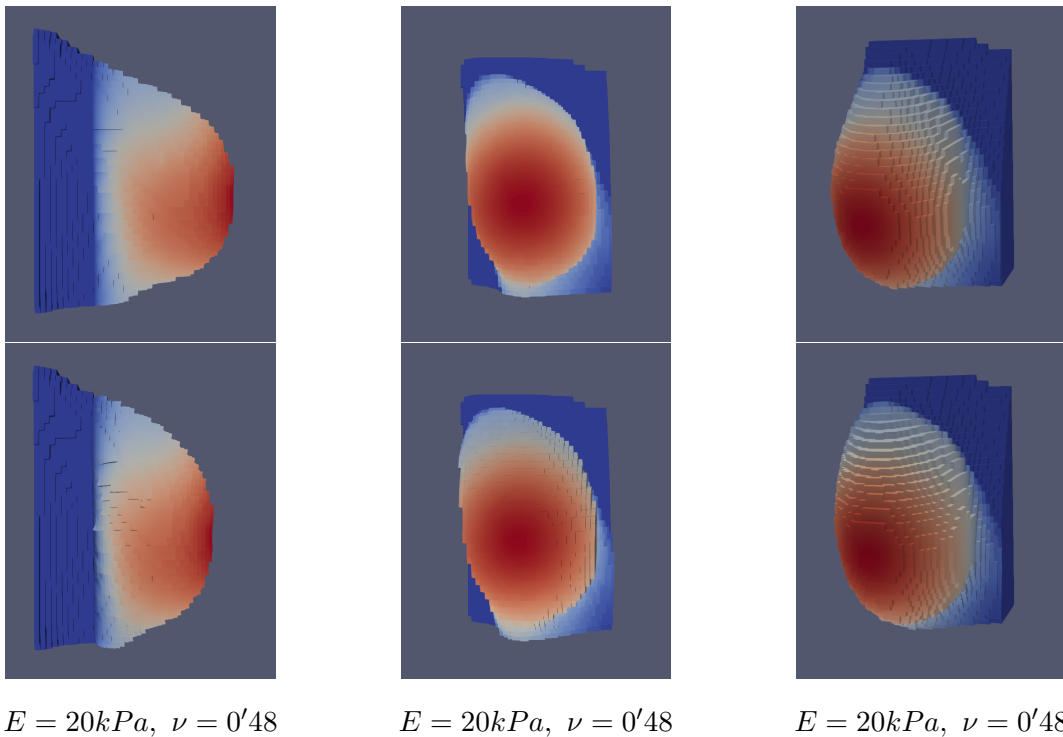


Figura 5.11: Simulación con el modelo de la mama, $E = 20kPa$, $\nu = 0.48$. La gravedad se aplica como si la mujer estuviese acostada boca arriba, perpendicular al torso.

En la parte de arriba se encuentra el modelo original, y en la de abajo el resultado tras la simulación. De izquierda a derecha vemos las vistas lateral, frontal y oblicua, en ese orden. Nótese que en el modelo original se ve la coloración que indica la cantidad de movimiento tras la simulación, aunque en este, claro está, no hay ningún desplazamiento. Decidimos mostrarlo así porque en un color sólido no se aprecian muy bien las formas.

Breve comentario sobre los tiempos de cómputo

Aunque no se ha llevado a cabo un estudio intensivo de los tiempos de cálculo necesarios para las simulaciones, ya que este no era el objetivo del proyecto, sí que podemos hacer algunas observaciones a este respecto.

Las simulaciones se han realizado en un contenedor de Docker con la imagen oficial que deal.II pone a disposición de los usuarios, donde están preinstaladas todas las dependencias necesarias para su correcto funcionamiento. Este contenedor está instalado sobre Ubuntu 22.04 LTS, en una máquina con

un procesador *AMD® Ryzen 9 5900hx with radeon graphics* $\times 16$, con 16 GiB de memoria RAM. La compilación del módulo de simulación se ha realizado con *CMake version 3.16.3*, la versión instalada en la imagen de deal.II.

Ejecutando las simulaciones con esta configuración, observamos lo siguiente:

- Las simulaciones de la semiesfera se ejecutan en unas decenas de segundos. Esta está compuesta por 16 elementos bidimensionales en la frontera y 36 tridimensionales en el interior.
- Las simulaciones de la mama real se ejecutan en unos veinte minutos, con una densidad de voxelizado de $40 \times 40 \times 40$. En total, el sólido tiene 30203 elementos finitos.

De esta forma, vemos lo significativo que es el número de elementos finitos en que se divide la figura antes de las simulaciones. Una mejora considerable en el tiempo de cómputo, sin afectar la precisión del método, sería desarrollar un algoritmo de voxelizado adaptativo, de manera que disminuya la densidad de vóxeles en las zonas 'aburridas' del objeto, como el interior, y aumentar esta densidad en las zonas de mayor complejidad, como será la frontera del objeto o, una vez que el modelo considere varios tipos de tejidos, aquellas zonas donde se pasa de un tipo a otro.

Capítulo 6

Conclusiones y vías futuras

En este último capítulo, vamos a analizar los resultados alcanzados, junto con los objetivos planteados al inicio del proyecto, para valorar si estos últimos han sido logrados, y hasta qué punto. Además, daremos algunas ideas que pueden motivar la ampliación del material hasta aquí expuesto, mejorándolo.

6.1. Conclusiones

Viendo la dificultad de la tarea planteada y las no muy abundantes referencias bibliográficas que pueden encontrarse sobre la aplicación del método de los elementos finitos al modelado de las deformaciones del tejido mamario, consideramos que los objetivos principales han sido alcanzados satisfactoriamente:

- Hemos alcanzado una comprensión alta del modelo de los elementos finitos, elemento clave para el desarrollo de modelos que permitan simular las deformaciones experimentadas por las mamas y cualquier otro tipo de tejido modelado correctamente.
- Se ha obtenido un modelo que, aunque simple, es capaz de capturar la acción de la gravedad sobre un modelo 3D de una mamografía. Además, el comportamiento de este modelo es consistente con lo que nos dice la teoría física: al aumentar el módulo de Young, el material se hará más rígido y, por tanto, experimentará un menor desplazamiento.
- Hemos conseguido discretizar una mamografía 3D de tal forma que el modelo desarrollado le sea aplicable. Además, podemos realizar esta discretización con una densidad tan alta como deseemos, siempre y cuando posteriormente nuestra máquina vaya a ser capaz de ejecutar la simulación completa.
- Hemos abierto el camino a que Cella Medical Solutions pueda seguir investigando en esta línea, que era de su interés y en la que no habían podido entrar por la barrera de entrada del peso matemático del método de los elementos finitos. Tras este trabajo, deben ser capaces de poder continuar por esta senda, con resultados prometedores.

Así, sentimos mucho orgullo de haber sido capaces de completar este proyecto, cuyas rompeduras de cabeza ahora han merecido la pena.

6.2. Vías futuras

Hay muchas vías posibles sobre las que construir mejoras al trabajo realizado, algunas de las cuales se han introducido a lo largo de la memoria. Pasamos en este punto a detallar una lista exhaustiva de las diferentes líneas de mejora que se nos ocurren:

- Adaptar la función de paso de un STL a un VTK, de forma que sea capaz de rellenar el volumen interior a la superficie de forma adaptativa. Esto es, poniendo hexaedros más grandes allá donde se pueda, y más pequeños donde se requiera. Normalmente los más grandes estarán ubicados en la parte más interior de la figura, y lo ideal sería refinar los tamaños conforme nos acercamos al borde. Esto, en principio, debería disminuir el tiempo de simulación, al haber menos elementos finitos.
- Añadir la posibilidad de considerar múltiples tipos de tejidos. Es particularmente interesante considerar, por lo menos, un modelo en el que hay tres tipos de tejidos: la grasa, el tejido glandular y el tumor. De esta manera nos acercaríamos mucho más al objetivo de la localización del tumor de forma computacional. Como vimos en el Capítulo 2, dedicado al estado del arte del problema, el tejido tumoral tiene un valor mayor del módulo de Young y, por tanto, es más rígido. Algo similar ocurre con el tejido glandular. Así, habría que estudiar la manera de definir estos valores en función del tipo de tejido del elemento finito considerado en cada momento.
- Mejorar el modelo, haciéndolo no lineal. Para esta tarea pueden seguirse varios enfoques. Como vimos, en [AMS00] dividen el proceso en etapas, en cada una de las cuales el modelo es lineal, pero el comportamiento conjunto es no lineal. La otra opción es tratar de establecer un modelo no lineal directamente, aunque no tenemos claro de qué forma podría hacerse esto.
- Obtener datos para contrastar los resultados obtenidos sería muy beneficioso para el problema, ya que podríamos corroborar nuestras hipótesis de forma sencilla y precisa.

Bibliografía

- [Ait22] Adam H. Aitkenhead. *Mesh voxelisation*. MATLAB Central File Exchange. 2022. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27390-mesh-voxelisation>.
- [Arn+21] Daniel Arndt y col. «The deal.II Library, Version 9.3». En: *Journal of Numerical Mathematics* 29.3 (2021), págs. 171-186. DOI: [10.1515/jnma-2021-0081](https://doi.org/10.1515/jnma-2021-0081). URL: <https://dealii.org/deal93-preprint.pdf>.
- [Aya15] Utkarsh Ayachit. *The ParaView guide: updated for ParaView version 4.3*. eng. Ed. por Lisa Avila. Full color version. Clifton Park, NY: Kitware Inc, 2015. ISBN: 9781930934306.
- [AMS00] F.S. Azar, D.N. Metaxas y M.D. Schnall. «A finite element model of the breast for predicting mechanical deformations during biopsy procedures». En: *Proceedings IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. MMBIA-2000 (Cat. No.PR00737)*. IEEE Comput. Soc, 2000. DOI: [10.1109/mmbia.2000.852358](https://doi.org/10.1109/mmbia.2000.852358).
- [AMS02] Fred S. Azar, Dimitris N. Metaxas y Mitchell D. Schnall. «Methods for modeling and predicting mechanical deformations of the breast under external perturbations». En: *Medical Image Analysis* 6.1 (mar. de 2002), págs. 1-27. DOI: [10.1016/s1361-8415\(01\)00053-6](https://doi.org/10.1016/s1361-8415(01)00053-6).
- [Big85] Roger Bigelow. «Needle Localization of Nonpalpable Breast Masses». En: *Archives of Surgery* 120.5 (mayo de 1985), pág. 565. DOI: [10.1001/archsurg.1985.01390290045007](https://doi.org/10.1001/archsurg.1985.01390290045007).
- [BC96] Morten Bro-Nielsen y Stephane Cotin. «Real-time Volumetric Deformable Models for Surgery Simulation using Finite Elements and Condensation». En: *Computer Graphics Forum* 15.3 (ago. de 1996), págs. 57-66. DOI: [10.1111/1467-8659.1530057](https://doi.org/10.1111/1467-8659.1530057).
- [Cas12] Bernardo Cascales Salinas. *Análisis funcional*. Spanish. OCLC: 864356789. Murcia: Electolibris, 2012. ISBN: 978-84-940688-2-9.
- [Cig+08] Paolo Cignoni y col. «MeshLab: an Open-Source Mesh Processing Tool». En: *Eurographics Italian Chapter Conference*. Ed. por Vittorio Scarano, Rosario De Chiara y Ugo Erra. The Eurographics Association, 2008. ISBN: 978-3-905673-68-5. DOI: [10.2312/LocalChapterEvents/ItalChap/ItalianChapConf2008/129-136](https://doi.org/10.2312/LocalChapterEvents/ItalChap/ItalianChapConf2008/129-136).
- [DBS17] Marta Danch-Wierzchowska, Damian Borys y Andrzej Swierniak. «Comparison of two approaches to breast deformation modelling based on a biomechanical model». En: *2017 Computing Conference*. IEEE, jul. de 2017. DOI: [10.1109/sai.2017.8252273](https://doi.org/10.1109/sai.2017.8252273).
- [ESG76] J. F. Egan, C. B. Saylor y M. J. Goodman. «A Technique for Localizing Occult Breast Lesions». En: *CA: A Cancer Journal for Clinicians* 26.1 (ene. de 1976), págs. 32-37. DOI: [10.3322/canjclin.26.1.32](https://doi.org/10.3322/canjclin.26.1.32).
- [Fau+12] François Faure y col. «SOFA: A Multi-Model Framework for Interactive Physical Simulation». En: *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*. Ed. por Yohan Payan. Vol. 11. Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials. Springer, jun. de 2012, págs. 283-321. DOI: [10.1007/8415_2012_125](https://doi.org/10.1007/8415_2012_125). URL: <https://hal.inria.fr/hal-00681539>.

- [FHS76] Howard A. Frank, Ferris M. Hall y Michael L. Steer. «Preoperative Localization of Non-palpable Breast Lesions Demonstrated by Mammography». En: *New England Journal of Medicine* 295.5 (jul. de 1976), págs. 259-260. DOI: [10.1056/nejm197607292950506](https://doi.org/10.1056/nejm197607292950506).
- [Fri+14] Sarah M. Friedewald y col. «Breast Cancer Screening Using Tomosynthesis in Combination With Digital Mammography». En: *JAMA* 311.24 (2014), págs. 2499-2507. ISSN: 0098-7484. DOI: [10.1001/jama.2014.6095](https://doi.org/10.1001/jama.2014.6095). eprint: <https://jamanetwork.com/journals/jama/articlepdf/1883018/joi140069.pdf>.
- [Gar] Krishna Garikipati. *The Finite Element Method for Problems in Physics*. University of Michigan. Coursera. URL: <https://www.coursera.org/learn/finite-element-method/home/info>.
- [Han+11] Lianghao Han y col. «Development of patient-specific biomechanical models for predicting large breast deformation». En: *Physics in Medicine and Biology* 57.2 (dic. de 2011), págs. 455-472. DOI: [10.1088/0031-9155/57/2/455](https://doi.org/10.1088/0031-9155/57/2/455).
- [Hen17] Reinhard Hentschke. *Classical Mechanics*. Springer International Publishing, ene. de 2017. 392 págs. ISBN: 3319487094. URL: https://www.ebook.de/de/product/27060435/reinhard_hentschke_classical_mechanics.html.
- [Her20] William Herring. *Learning radiology: recognizing the basics*. 4th. Elsevier - Health Science Division, 2020.
- [Hic37] N. Frederick Hicken. «Mammography. The roentgenographic diagnosis of breast tumors by means of contrast media.» En: *Surg Gynecol Obstet* 64 (1937), págs. 593-603.
- [Jee15] Nadir Jeevanjee. *An introduction to tensors and group theory for physicists*. New York, NY: Springer Science+Business Media, 2015. ISBN: 9783319147932.
- [JJ87] Claes Johnson y Claes Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press, 1987. ISBN: 978-0-521-34514-9 978-0-521-34758-7.
- [Kin+94] David Kincaid y col. *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico*. Spanish. OCLC: 1024062633. Argentina; España [etc: Addison-Wesley Iberoamericana, 1994. ISBN: 9780201601305.
- [Kro+98] Thomas A. Krouskop y col. «Elastic Moduli of Breast and Prostate Tissues under Compression». En: *Ultrasonic Imaging* 20.4 (oct. de 1998), págs. 260-274. DOI: [10.1177/016173469802000403](https://doi.org/10.1177/016173469802000403).
- [Llo+12] J. A. Solves Llorens y col. «Segmentation of the Breast Skin and Its Influence in the Simulation of the Breast Compression during an X-Ray Mammography». En: *The Scientific World Journal* 2012 (2012), págs. 1-8. DOI: [10.1100/2012/876489](https://doi.org/10.1100/2012/876489).
- [Man20] Antonio Mangas. *Algoritmos de corte para aplicaciones de planificación quirúrgica*. Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2020.
- [Mar+17] F. Martnez-Martnez y col. «A finite element-based machine learning approach for modeling the mechanical behavior of the breast tissues under compression in real-time». En: *Computers in Biology and Medicine* 90 (nov. de 2017), págs. 116-124. DOI: [10.1016/j.combiomed.2017.09.019](https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2017.09.019).
- [MAT22] MATLAB. *MatLab R2022a*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2022. URL: <https://es.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [Pal+08] A. Pérez del Palomar y col. «A finite element model to accurately predict real deformations of the breast». En: *Medical Engineering & Physics* 30.9 (nov. de 2008), págs. 1089-1097. DOI: [10.1016/j.medengphy.2008.01.005](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2008.01.005).
- [RMH] Juergen Riegel, Werner Mayer y Yorik van Havre. *FreeCAD (version 0.20)*. Software. URL: https://wiki.freecadweb.org/Main_Page.
- [Sed97] L. I. Sedov. *Mechanics of continuous media*. eng. Series in theoretical and applied mechanics 4. Singapore: World Scientific, 1997. ISBN: 9789971507282.

- [Smi09] Michael Smith. *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.9*. English. United States: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.
- [Thr+74] Barbara Threatt y col. «Percutaneous needle localization of clustered mammary microcalcifications prior to biopsy». En: *American Journal of Roentgenology* 121.4 (ago. de 1974), págs. 839-842. DOI: [10.2214/ajr.121.4.839](https://doi.org/10.2214/ajr.121.4.839).
- [TGY17] Michele Tonutti, Gauthier Gras y Guang-Zhong Yang. «A machine learning approach for real-time modelling of tissue deformation in image-guided neurosurgery». En: *Artificial Intelligence in Medicine* 80 (jul. de 2017), págs. 39-47. DOI: [10.1016/j.artmed.2017.07.004](https://doi.org/10.1016/j.artmed.2017.07.004).
- [WK22] Kuocheng Wang y Thenkurussi Kesavadas. «Real-Time FEA-based breast deformation simulation using artificial neural network». En: *Computer Methods and Programs in Biomedicine Update* 2 (2022), pág. 100052. DOI: [10.1016/j.cmpbup.2022.100052](https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2022.100052).
- [Yeh15] Jacob Rubinstein Yehuda Pinchover. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, mayo de 2015. 384 págs. ISBN: 052161323X. URL: https://www.ebook.de/de/product/4209282/yehuda_pinchover_jacob_rubinstein_an_introduction_to_partial_differential_equations.html.
- [ZTZ05] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Lee Taylor y J. Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. eng. 6th ed. Burlington (Mass.): Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN: 978-0-7506-6320-5.

Apéndice A

Tabla resumen de la cuadratura de Gauss

En el capítulo 7 de [Kin+94], podemos encontrar teoremas que nos ayudan a encontrar los puntos a usar para aplicar en la fórmula de cuadratura, así como los pesos. En la Tabla A.1 obtenida a partir de estos teoremas, vemos los valores para $n \leq 3$.

| n | ξ | w |
|-----|-----------------------|---------------|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| 3 | $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ | $\frac{5}{9}$ |
| | 0 | $\frac{8}{9}$ |
| | $\sqrt{\frac{3}{5}}$ | $\frac{5}{9}$ |

Tabla A.1: Tabla de valores para aplicar cuadratura de Gauss.