CAPÍTULO 1: LA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE

Ecuación de la cuerda vibrante: $(1)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & t>0, x\in(0,L) \\ u(t,0)=u(t,L)=0 & t\geq 0 \\ u(0,x)=f(x),\ u_t(0,x)=g(x) & x\in(0,L) \end{cases}$

Variantes: **con rozamiento:** $u_{tt}=c^2uxx-\mu u_t$ **con fuerza externa:** $u_{tt}=c^2u_{xx}+F(t,x)$ **densidad no cte:** $u_{tt}=\frac{\tau}{\delta(x)}u_{xx}$

Lema de D'alembert: - Si $F,G\in C^2(\mathbb{R})$ entonces $u(t,x)=F(x-ct)+G(x+ct)$ verifica $u_{tt}=c^2u_{xx}$.

- Si $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ entonces $u_{tt}=c^2u_{xx}\implies \exists F,G\in C^2(\mathbb{R})$ tales que $u(t,x)=F(x-ct)+G(x+ct)$.

> **Teorema 1: solución de la cuerda vibrante en $\mathbb{R}$:** sean $f,g\in C^2(\mathbb{R})$, entonces $\exists! u\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ verificando (1) (sin las condiciones de contorno) y es $u(t,x)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$.

Hacemos el cv $y=x-ct, z=x+ct\implies t=\frac{z-y}{2c}, x=\frac{z+y}{2}$. Definimos $v(y,z)=u(t,x)$. Entonces $u_t=v_yy_t+v_zz_t=v_y(-c)+cv_z$, $u_{tt}=v_{yy}(-c)^2+v_{yz}(-c)c+v_{zy}c(-c)+v_{zz}c^2$, $u_x=v_yy_x+v_zz_x=v_y+y_z$ y $u_{xx}=v_{yy}+2v_{yz}+v_{zz}$. Entonces $0=u_{tt}-c^2u_{xx}=c^2[v_{yy}-2v_{yz}+v_{zz}-v_{yy}-2v_{yz}-v_{zz}]=-4c^2v_{yz}\implies v_{yz}=0$.

Integrando 2 veces $\overset{\int dy}{\to} 0=\int_0^y v_{yz}(s,z)\,ds=v_z(y,z)-v_z(0,z)\overset{\int dz}{\to} 0=\int_0^z(v_z(y,w)-v_z(0,w))\,dw=v(y,z)-v(y,0)-v(0,z)+v(0,0)$. Por tanto, $v(y,z)=v(y,0)+v(0,z)-v(0,0)$. Tomando $F(y)=v(y,0)$ y $G(z)=v(0,z)-v(0,0)$ tenemos que $F,G\in C^2(\mathbb{R})$ y deshaciendo el cv sale $u(t,x)=F(x-ct)+G(x+ct)$.

Así hemos hallado la solución general de la EDP. Ahora imponemos las condiciones iniciales $u(0,x)=f(x)$ y $u_t(0,x)=g(x)$.

$u(0,x)=F(x)+G(x)=f(x)$

$u_t(0,x)=[F'(x-ct)(-c)+G'(x+ct)c]_{t=0}=-cF'(x)+cG'(x)=g(x)$

Haciendo $c(1)'+(2)$ tenemos $cf'(x)+g(x)=2cG'(x)\implies G(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(cf'(s)+g(s))\,ds\implies G(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(0))+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds$.

Y $F(x)=f(x)-G(x)=\frac{f(x)+f(0)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds$

Por tanto $u(t,x)=F(x-ct)+G(x+ct)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$.

> **Teorema 2: solución cuerda vibrante en $[0,L]$ con extremos fijos:** sean $f\in C^2([0,L]), g\in C^1([0,L])$ con $f(0)=f(L)=0,\ g(0)=g(L)=0,\ f''(0)=f''(L)=0$. Entonces $\exists! u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,L])$ verificando (1) y es $u(t,x)=\frac{\tilde{f}(x-ct)+\tilde{f}(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{g}(s)\,ds$, donde $\tilde{f},\tilde{g}$ son las extensiones impares de f y g.

Lemas de continuidad de $\tilde{f},\tilde{g}$: si $f\in C^2([0,L])$, entonces **a)** $\tilde{f}\in C(\mathbb{R})\iff f(0^+)=f(L^-)=0$, y en ese caso, **b)** $\tilde{f}\in C^1(\mathbb{R})$ y **c)** $\tilde{f}\in C^2(\mathbb{R})\iff f''(0^+)=f''(L^-)=0$. Si $g\in C([0,L])\,|g(0)=g(L)\implies\int_0^x\tilde{g}(s)\,ds\in C^2(\mathbb{R})$.

Existencia: basta ver que $u(t,x)$ del enunciado cumple la EDP. Por los lemas de continuidad, $u(t,x)\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ y por el lema de D'alembert, al ser $u(t,x)$ suma de ondas viajeras cumple $u_{tt}=c^2u_{xx}$. Se tiene $u(t,0)=u(t,L)=0$. Por último $u(0,x)=\tilde{f}(x)=f(x), x\in[0,L]$ y $u_t(0,x)=\tilde{g}(x)=g(x), x\in[0,L]$.

Unicidad: supongamos que $v(t,x)$ es solución de la EDP. ¿Es de la forma $u(t,x)$ del enunciado? Sea $\tilde{v}(t,x)$ la extensión impar, $2L$-periódica de v en la coordenada x. Entonces, $v\in C^2(\mathbb{R}\times[0,L])$ y verifica la EDP, por lo que se puede comprobar que $\tilde{v}\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ y verifica la EDP en $\mathbb{R}$. Como $\tilde{v}(0,x)=\tilde{f}$ y $\tilde{v}_t(0,x)=\tilde{g}$, por el teorema 1 es $\tilde{v}=u$.

> **Propiedades de las soluciones: 1)** la EDP es reversible en el tiempo, si conozco $u(0,x)=f(x),\ u_t(0,x)=g(x)$, puedo determinar $u(t,x),\forall t$. **2)** la velocidad de propagación es finita, si $sop(u(t_0,\cdot))\subset[a,b]\implies sop(u(t_0+T),\cdot)\subset[a-cT,b+cT]$. **3)** $\Box=\partial_{tt}-c^2\partial_{xx}$ no es un operador regularizante, o sea, $\Box u=0\not\Rightarrow u\in C^\infty$. **4)** Conservación de la energía: se suele definir la energía como $E(t)=\int\left(|u_t|^2+|\nabla_x u|^2\right)dx$. Si $u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,L])$ es solución de (1) entonces $E(t)=cte,\ \forall t>0$.

Demostración de conservación de la energía: sea $t>0$, entonces

$E'(t)=\frac{\rho}{2}\int_0^L\left(2u_tu_{tt}+c^22u_xu_{xt}\right)dx=\rho\int_0^L\left(u_tc^2u_{xx}+c^2u_xu_{xt}\right)dx=\rho c^2\int_0^L(u_tu_x)_x\,dx=\rho c^2[u_tu_x]_{x=0}^{x=L}=$

$=\rho c^2[u_t(t,L)u_x(t,L)-u_t(t,0)u_x(t,0)]=\begin{bmatrix} u(t,0)\equiv 0\implies u_t(t,0)=0 \\ u(t,L)\equiv 0\implies u_t(t,L)=0\end{bmatrix}=0\implies E(t)=cte$

> **Corolario de la conservación de la energía: UNICIDAD:** sean $u_1,u_2\in C^2(\mathbb{R}\times[0,L])$ soluciones de $(2)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}-\mu u_t+F(t,x) & t>0, x\in[0,L] \\ u(0,x)=f(x),\ u_t(0,x)=g(x) & x\in[0,L] \\ u(t,0)=u(t,L)=0 & t>0\end{cases}$, entonces $u_1=u_2$.

Sea $v(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)\in C^2(\mathbb{R}\times[0,L])$ entonces $\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx}-\mu v_t \\ v(t,0)=v(t,L)=0 \\ v(0,x)=v_x(0,x)=0 & \textit{condición inicial nula}\end{cases}$, entonces

$E_v(t) \le E_v(0) \overset{cc\ nula}{=} 0$, y es $0 \le E_v(t) = \int_0^L \left[v_t^2 + c^2 v_x^2\right] dx \le 0 \implies (v_t)^2 + c^2 (v_x)^2 = 0,\ \forall x \in [0,L], \forall t > 0$. Entonces $v_t \equiv 0, v_x \equiv 0 \implies v(t,x) \equiv cte$ y $v(0,x) = 0$ por lo que $v(t,x) \equiv 0$ y es $u_1 = u_2$.

La solución de Bernoulli: Bernoulli consideró cuerdas con posiciones iniciales expresables mediante sumas finitas de senos tras observar las vibraciones de una cuerda real y propuso que la solución general del problema de la cuerda vibrante debería ser una superposición de ondas estacionarias caracterizadas por los armónicos principales. O sea $u(t,x) = \sum_{n\ge1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t)$ donde $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ es el n-ésimo armónico y $T_n(t)$ es la amplitud del n-ésimo armmónico asociada al timbre del instrumento. Sustituyendo en la ecuación, sale $u(t,x) = \sum_{n\ge1} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$. Esta solución fue criticada por ser menos general y rigurosa que la de D'Alembert, porque solo valdría para posiciones iniciales expresables como sumas de senos. Aunque Fourier más tarde postularía que cualquier función podría escribirse de esta forma.

CAPÍTULO 2: LA ECUACIÓN DEL CALOR

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u & t > 0, x \in \Omega \\ u(0,x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(t,x) = \varphi(t,x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Lema: si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con f continua en $x_0 \in \Omega$, entonces $\lim_{r\to0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx = f(x_0)$.

Sea $\varepsilon > 0 \implies \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$ entonces $\left|⨍_{B_r(x_0)} f(x)\,dx - f(x_0)\right| = \left|⨍_{B_r} (f(x) - f(x_0))\right| \le ⨍_{B_r} |f(x) - f(x_0)|\,dx \overset{r\in(0,\delta)}{<} \varepsilon$.

Resolución por separación de variables: se supone que $u(t,x)$ es de la forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ y se comprueba qué debe suceder para que se verifique (2). Se obtiene $T'(t)X(x) = \alpha T(t)X''(x) \implies \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\frac{X''(x)}{X(x)}$ y el LHS solo depende de t, el RHS solo depende de x, por lo que, al ser iguales, el resultado debe ser independiente de x, t y es constante: $\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\frac{X''(x)}{X(x)} = \rho$. Se resuelven ahora $(2.T)\begin{cases} T'(t) = \rho T(t) \\ T(t) \overset{t\to\infty}{\to} 0 \end{cases}$ y $(2.X)\begin{cases} X''(x) = \frac{\rho}{\alpha}X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$ y se obtiene la solución general $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty B_n e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Lema: si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$. Por tanto, los coeficientes son $B_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$.

> **Teorema 1: Solución de la ecuación del calor en $[0, L]$ con extremos nulos**: sea $f(x) \in C([0,L])$ tal que $f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ donde $\sum_{n=1}^\infty |b_n| < \infty$ (si $f \in C^1([0,L])$ con $f(0) = f(L) = 0$ entonces esto se cumple). Entonces $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ t \ge 0,\ x \in [0,L]$ es $u \in C^\infty((0,\infty)\times(0,L)) \cap C([0,\infty)\times[0,L])$ y cumple (2).

Lema: sean $f_n \in C^1([a,b])$ tales que $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ y $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ convergen uniformemente para $x \in [a,b]$. Entonces $F(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ es de clase $C^1([a,b])$ y $F'(x) = \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ para $x \in [a,b]$.

M-test de Weiertrass: sean $f_n \in C^1(\Omega)$ tales que $\sup_{x\in\Omega}|f_n(x)| \le M_n$ con $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$. Entonces $F(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge uniforme y absolutamente $\forall x \in \Omega$ y, en particular, $F \in C(\Omega)$.

Demostración del teorema 1:

$u_n(t,x) = b_n e^{-\mu n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \in C^2$ con $\mu = \frac{\alpha\pi^2}{L} > 0$, entonces $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t,x) \overset{¿?}{\in} C^\infty((0,\infty)\times[0,L])$. Notemos que $|u_n(tmx)| = |b_n|\left|e^{-\mu n^2 t}\right|\left|\sin\frac{n\pi x}{L}\right| \le |b_n|$ y por hipótesis $\sum|b_n| < \infty$, por tnato, por el M-test $\sum_{n=1}^\infty u_n(t,x)$ converge uniformemente y es $C([0,\infty)\times[0,L])$.

Veamos ahora que las series derivadas convergen uniformemente:

$\left|\partial_t^k\partial_x^l u_n(t,x)\right| = \left|b_n c_{k,l} n^{2k+l} e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right| \le c_{k,l}|b_n| n^{2k+l} e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t} \le c_{k,l}|b_n|\frac{n^{2k+l} + c_{k+l}}{\left(\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t\right)^{k+l}} \le \frac{\tilde{c_{k,l}}}{t^{k+l}}|b_n| = M_n(t)$.

Como $\sum_{n=1}^\infty M_n(t) < \infty, \forall t \ge t_0 > 0$ entonces $\sum_{n=1}^\infty \partial_t^k\partial_x^l u_n(t,x)$ converge uniformemente en $[t_0,\infty)\times[0,L]$ y por el lema 1 es $u(t,x) \in C^\infty([t_0,\infty)\times[0,L])$ para todo $t_0 > 0 \implies u \in C^\infty((0,\infty)\times[0,L])$.

Definición: frontera parabólica. Sea $R = [0,T]\times[0,L]$. Llamamos frontera parabólica de R a $\partial_p R = \partial R \backslash (\{T\}\times(0,L))$.

> **Teorema 2**: **principio del máximo para la ecuación del calor.** Sea $u \in C^{1,2}_{(t,x)}([0,T]\times[0,L])$ que cumple $u_t \le \alpha u_{xx}$ en $R = [0,T]\times[0,L]$. Entonces $\max_{(t,x)\in R} u(t,x) = \max_{(t,x)\in\partial_p R} u(t,x)$. Por simetría, si $u_t \ge \alpha u_{xx}$, cumple un principio del mínimo.

Sea $(t_0, x_0) \in R : \max_R u = u(t_0, x_0)$.

Caso1: suponer que $u_t < \alpha u_{xx}$ en R, veamos que $(t_0,x_0) \in \partial_p R$. Si no fuera así, sería (a)o bien $(t_0,x_0) \in \mathring{R}$ (b) o bien $(t_0,x_0) \in \{T\}\times(0,L)$ (tapa superior).

Si fuese (a) entonces (t_0,x_0) es máximo local de $u \implies u_t(t_0,x_0) = 0$ y $u_x(t_0,x_0) = 0$,y $u_{xx}(t_0,x_0) \le 0$. Entonces $u_t(t_0,x_0) - \alpha u_{xx}(t_0,x_0) \ge 0\#$.

Si fuese (b) entonces $t_0 = T$ y $x_0 \in (0, L)$, además x_0 es máximo local de $x \mapsto u(T,x) \implies u_{xx}(T, x_0) \le 0$. Además, mirando la línea vertical $\{x = x_0\}$, es $u(t, x_0) \le u(T, x_0), \forall t \le T \implies u_t(T, x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(T,x_0)-u(T-h,x_0)}{h} \ge 0$, por lo que $u_t(T, x_0 - \alpha u_{xx}(T, x_0)) \ge 0\#$.

Por tanto, $(t_0, x_0) \in \partial_p R$.

Caso general: $u_t \le \alpha u_{xx}$ en R.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos $v(t,x) = u(t,x) + \varepsilon x^2 \in C^{1,2}(R)$. Notemos que $v_t - \alpha v_{xx} = u_t - \alpha u_{xx} - 2\alpha\varepsilon < 0$. Por lo que podemos aplicarle el caso1 a v, y es $\max_R u \le \max_R v = \max_{\partial_p R} v = \max_{\partial_p R} \left[u(t,x) + \varepsilon x^2\right] \le \max_{\partial_p R} u + \varepsilon L^2$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ es $\max_R u \le \max_{\partial_p R} u \implies \max_R u = \max_{\partial_p R} u$

Corolario 1: si $u \in C^{1,2}_{(t,x)}(R)$ y $u_t = \alpha u_{xx}$ en R entonces $\max_R u = \min_{\partial_p R} u$ y $\min_R u = \min_{\partial_p R} u$.

Corolario 2: Unicidad. Sean $F(t,x), f(x), \phi_0(t), \phi_1(t)$ continuas en R. Entonces la EDP

$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} + F(t,x) & (t,x) \in R \\ u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ u(t,0) = \phi_0(t),\ u(t,L) = \phi_1(t) & t \in [0,T] \end{cases}$ tiene, a lo sumo, una única solución $u(t,x) \in C^{1,2}_{(t,x)}(R)$.

Sean u_1, u_2 dos soluciones. Entonces $v(t,x) = u_1 - u_2 \in C^{1,2}_{t,x}(R)$ y cumple $\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} & \textit{en } R \\ v(0,x) = 0 \\ v(t,0) = v(t,L) = 0 \end{cases} \implies v \equiv 0$, *en* $\partial_p R$, pero entonces $\max_R v = \max_{\partial_p R} v = 0$ y $\min_R v = \min_{\partial_p R} v = 0$, por lo que $v \equiv 0$ y $u_1 = u_2$.

Teorema 3: decrecimiento de energía. Sea $u \in C^{1,2}_{(t,x)}([0,\infty] \times [0,L])$ tal que $\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ y $u(t,0) \cdot u_x(t,0) \ge u(t,L)\, u_x(t,L)$. Entonces $E(t) = \int_0^L |u(t,x)|^2\, dx, t > 0$ es decreciente. En particular $E(t) \le E(0) = \int_0^L |f(x)|^2\, dx,\ \forall t > 0$.

$E'(t) = \int_0^L \frac{d}{dt}\left(u^2\right) dx = \int_0^L 2uu_t dx = 2\alpha \int_0^L uu_{xx} dx \overset{partes}{=} 2\alpha \left([uu_x]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x^2 dx \right) \le 0$

Corolario: unicidad + estabilidad. si $u_1(t,x), u_2(t,x) \in C^{1,2}(R)$ son soluciones de

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} + F(t,x) & (t,x) \in R \\ u(t,0) = \phi_0(t),\ u(t,L) = \phi_1(t) & [\text{o bien } u_x(t,0) = \phi_0(t),\ u_x(t,L) = \phi_1(t)] \end{cases}$$

con datos iniciales $u_1(0,x) = f_1(x),\ u_2(0,x) = f_2(x)$ entonces

$\sup_{t>0} \int_0^L |u_1(t,x) - u_2(t,x)|^2\, dx \le \int_0^L |f_1(x) - f_2(x)|^2\, dx$.

La ecuación del calor en $\mathbb{R}$: buscamos ahora resolver $\begin{cases} (*)\, u_t = u_{xx} & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$. Primero obtenemos una solución particular, normalizada, o sea con $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, dx = 1,\ \forall t > 0$, mediante el **método de autosemejanzas:** buscamos λ, μ, γ tales que si u cumple $(*)$, entonces $v(t,x) = \gamma u(\lambda t, \mu x)$ también cumple $(*)$. Entonces es $\begin{cases} v_t = \gamma u_t(\lambda t, \mu x)\lambda \\ v_{xx} = \gamma u_{xx}(\lambda t, \mu x)\mu^2 \end{cases} \to v_t = v_{xx} \iff \lambda = \mu^2$. Por tanto $v(t,x) = \gamma u\left(\lambda t, \sqrt{\lambda} x\right)$ (**dilatación parabólica**).

Además, $1 = \int_{\mathbb{R}} v(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma u\left(\lambda t, \sqrt{\lambda}x\right) dx \overset{\sqrt{\lambda}x = z}{=} \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} u(\lambda t, z)\, dz = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}$, por lo que $\sqrt{\lambda} = \gamma$.

Por tanto, si u cumple $(*)$, entonces $v(t,x) = \sqrt{\lambda} u\left(\lambda t, \sqrt{\lambda}x\right)$ cumple $(*)$, $\forall \lambda > 0$.

Utilizamos esta relación para buscar una solución particular a partir de una función de una variable. Tomando $\lambda = \frac{1}{t}$, tenemos $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Ahora $v_t = \frac{\frac{-1}{2}}{t^{\frac{3}{2}}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{t}} \phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{-\frac{1}{2}}{t^{\frac{3}{2}}} x$ y $v_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$. Como debe ser $v_t = v_{xx}$, entonces $\frac{-1}{2}\left(\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) = \phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, y tomando $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$, queda $\phi(r) + r\phi'(r) = -2\phi''(r) \iff (r\phi(r))' = -2\phi''(r) \implies r\phi(r) = -2\phi'(r) + C$, tomamos ahora $C = 0$, pues buscamos una solución particular. De modo que es $\frac{-r}{2} = \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} \implies -\frac{r^2}{4} + C = \log(\phi(r)) \implies \phi(r) = e^{-\frac{r^2}{4} + C} = Ke^{-\frac{r^2}{4}}$. Como queremos que $\int_{\mathbb{R}} v dx = 1$, entonces $1 = \int_{\mathbb{R}} Ke^{-\frac{r^2}{4}} dr = K\sqrt{4\pi} \implies K = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Por tanto, hemos obtenido la solución particular $W(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},\ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Esta función se denomina **núcleo de Gauss-Weierstrass**.

Propiedades de W: 1) $W(t,x) \in C^{\infty}((0,\infty)\times\mathbb{R})$.
2) $W(t,x) > 0,\ \forall (t,x)$
3) $\int_{\mathbb{R}} W(t,x)\,dx = 1,\ \forall t > 0$
4) $W_t = W_{xx}$
5) $\lim_{t\to 0} W(t,x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases} = \delta(x)$. O sea, formalmente, W es solución de la EDP $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) = \delta(x) \end{cases}$. Esta $\delta(x)$ es una temperatura inicial concentrada en $x=0$ y de calor total 1, o sea $sop\delta = \{0\}$, $\int_{\mathbb{R}} \delta dx = 1$. Esta es la **delta de Dirac**.
Podemos imaginar la varilla como unión de bolas puntuales, en posición $\{y_j\}$, entonces $f(y_j)\Delta y \sim \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} f(y)\,dy$ y entonces $f(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_j f(y_j)\Delta y \delta(y - y_j)$. Así, el candidato a solución es

$$u(t,x) = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_j f(y_j)\Delta y W(t, x - y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) W(t, x-y)\,dy$$

Teorema: Solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}$: si $f \in C(\mathbb{R})$ y acotada, entonces $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) W(t,x-y)\,dy$ con $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ cumple $u \in C^{\infty}((0,\infty),\mathbb{R})$, $u_t = u_{xx}$, $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ y $\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = f(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Lema de expresión de la derivada l-ésima de W con un polinomio de grado l: si $l \in \mathbb{N}_0$, entonces $\exists P_l$, un polinomio de grado l, tal que $\partial_x^l [W(t,x)] = \frac{1}{(\sqrt{t})^l} P_l\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) W(t,x)$

Teorema de Tychonoff: $\exists 0 \neq v(t,x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ tal que $\begin{cases} v_t = v_{xx} & (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ v(0,x) \equiv 0 \end{cases}$ (sin unicidad en general)

Teorema de unicidad de Tychonoff: si $u \in C^{\infty}((0,\infty)\times\mathbb{R}) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R})$ tal que $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) \equiv 0 \\ |u(t,x)| \leq C^{a|x|^2} \end{cases}$, entonces $u(t,x) \equiv 0$.

Propiedades de la ecuación del calor:
(1) Regularidad: $u \in C^{\infty}((0,\infty)\times\mathbb{R})$
(2) Velocidad de propagación infinita: $f \geq 0 \implies sop(u) = \mathbb{R},\ \forall t > 0$
(3) Irreversibilidad en t: si $u(0,x) = f(x)$, entonces puedo hallar $u(t,x), t > 0$, pero no para $t < 0$.
(4) Decaimiento en t (difusión): supongamos $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces, por un lado $\int_{\mathbb{R}} u dx = \int_{\mathbb{R}} f dx = cte,\ \forall t > 0$. Por otro lado, $|u(t,x)| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\sqrt{4\pi t}} = \frac{C_f}{\sqrt{t}} \overset{t\to\infty}{\to} 0$.
(5) No unicidad

CAPÍTULO 3: LA ECUACIÓN DE LAPLACE

El **laplaciano** es el operador $\Delta = \partial^2_{x_1 x_1} + ... + \partial^2_{x_n x_n}$.
$div(F) = \nabla \cdot F = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_{x_j}}{x_j}$
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$
Si f es una función escalar, también se denota $\nabla f = gradf$.
$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (*ó* $\mathbb{C}$) es **armónica en el abierto Ω,** $u \in Har(\Omega)$, si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω.
Proposición: algunas funciones armónicas: si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $Ref, Imf \in Har(\Omega)$.
Si Ω es simplemente conexo y $u \in Har(\Omega)$, entonces $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) | u = Ref$.

Problema del calor estacionario: para el problema de propagación del calor en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\begin{cases} u_t = \Delta u & \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi & \text{cond cont} \\ u(0,\cdot) = f & \text{temp inicial} \end{cases}$, ¿cuál será la temperatura de equilibrio, $\overline{u}(x)$, cuando $t \to \infty$? Debe cumplir $\begin{cases} \Delta \overline{u} = 0 & en\ \Omega \\ \overline{u}_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$. Las funciones armónicas se pueden interpretar como temperaturas en equilibrio.

Problema de Dirichlet: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$. Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω, cuando se fija un dato φ en $\partial\Omega$.

Problema de Neumann: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \varphi \in C(\partial\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \overrightarrow{n}_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$. Equivale a encontrar la temperatura de equilibrio en Ω, cuando se fija un flujo de calor entrante.

Problema de Robin: igual, con $\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ \nabla u \cdot \overrightarrow{n} + \gamma u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$. Es más general, que el caso anterior, pues el flujo depende también de la temperatura de la frontera.

Ecuación de Poisson: dado $f \in C(\Omega)$, hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u_{|\partial\Omega} \equiv 0 \end{cases}$. Es la versión no homogénea del problema de Dirichlet.

Resolución del Problema de Dirichlet en $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$: sea $\mathbb{D}$ el disco unidad abierto. Dado $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$, buscamos $u \in C^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ tal que $(PD) \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\mathbb{D}} = \varphi \end{cases}$.

Pasamos la EDP a coordenadas polares $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

Lema: laplaciano en polares: en coordenadas polares, es $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}$.

Así, buscamos $v(r,\theta)$ tal que $\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 & (r,\theta) \in (0,1) \times (0,2\pi) \\ v(1,\theta) = \varphi(\theta) & \theta \in (0,2\pi) \\ v\ 2\pi\text{−periódica en } \theta \\ \exists \lim_{r\to 0^+} v(r,\theta) \end{cases}$.

Usamos separación de variables: buscamos $v(r,\theta) = R(r)G(\theta) \not\equiv 0$: $R''G + \frac{1}{r}R'G + \frac{1}{r^2}RG'' = 0$. Multiplicamos por $\frac{r^2}{RG}$: $\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} = -\frac{G''}{G} \equiv cte = \rho$. Y obtenemos las EDOs: (1) $\begin{cases} r^2R'' + rR' = \rho R \\ \exists R(0^+) \end{cases}$ y (2) $\begin{cases} G'' = -\rho G \\ G\ 2\pi \text{ periódica} \end{cases}$.

Empezamos con (2): si suponemos $\rho = -\lambda^2 < 0 \implies G'' = \lambda^2 G \implies G(\theta) = A\sinh(\lambda\theta) + B\cosh(\lambda\theta) \overset{G\ 2\pi-periódica}{\implies} A = B = 0\#$

si suponemos $\rho = 0 \implies G'' = 0 \implies G(\theta) = A + B\theta \overset{2\pi-per}{\implies} B = 0 \implies G_0(\theta) = A_0$

si $\rho = \lambda^2 > 0 \implies G'' = -\lambda^2 G \implies G(\theta) = A\cos(\lambda\theta) + B\sin(\lambda\theta) \overset{G(0)=G(\pi),G'(0)=G'(\pi)}{\implies} A = A\cos(2\pi\lambda) + B\sin(2\pi\lambda)$ y $B\lambda = -A\lambda\sin(2\pi\lambda) + B\lambda\cos(2\pi\lambda)$.

Obtenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{ccc} A(1 - cos(2\pi\lambda)) & -B\sin(2\pi\lambda) & = 0 \\ A\sin(2\pi\lambda) & +B(1-\cos(2\pi\lambda)) & = 0 \end{array} \right\}$ y buscamos una solución no trivial. El determinante da $(1-\cos(2\pi\lambda))^2 + (\sin(2\pi\lambda))^2$, como queremos que se anule, debe ser $\begin{cases} \cos(2\pi\lambda) = 1 \\ \sin(2\pi\lambda) = 0 \end{cases}$ por lo que $\lambda \in \mathbb{Z}$. Por tanto $G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta),\ \rho = n^2,\ n = 1, 2, ...$

Vamos ahora a resolver (1). ρ ya no es arbitrario, es $\rho = \rho_n = n^2, n = 0, 1, 2, ...$, entonces $r^2R'' + rR' = n^2R$.

$n = 0$: $r^2R + rR' = 0 \implies rR'' + R' = 0 \implies (rR')' = 0 \implies rR' = A \implies R' = \frac{A}{r} \implies R = A\log(r) + B$, donde $A = 0$ porque queremos que $\exists \lim_{r\to 0^+}$.

$n > 0$: $r^2R'' + rR' = n^2R$. Buscamos soluciones del tipo $R(r) = r^k$.

$r^2\left(k(k-1)r^{k-2}\right)r\left(kr^{k-1}\right) = n^2r^k \implies k(k-1)r^k + kr^k = n^2r^k \implies k(k-1) + k = n^2 \implies k^2 = n^2 \implies k = \pm n$.

Así, la solución general es $R(r) = Ar^{-n} + Br^n$ y hacemos $A = 0$ porque $\exists R(0+)$. O sea $R_n(r) = B_nr^n$.

Por tanto, la solución general de la EDP es $v(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$.

Para obtener los coeficientes, usamos la condición de contorno $\varphi(\theta) = v(1,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$ y usamos ortogonalidad para obtener $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi d\theta$, $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos(n\theta)d\theta$, $B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin(n\theta)d\theta$.

El núcleo de Poisson: ahora queremos expresar la solución v anterior como una **fórmula integral explícita** de la forma

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)P(r,\theta - s)ds$$

donde φ es la condición de contorno y $P(r,\theta - s)$ es un núcleo.

Para ello reescribimos la serie en forma compleja,

$v(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[A_n\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} + B_n\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[\frac{A_n - iB_n}{2}e^{in\theta} + \frac{A_n+iB_n}{2}e^{-in\theta}\right] = (*)$.

Llamamos $a_0 = A_0, a_n = \frac{A_n-iB_n}{2}, a_{-n} = \frac{A_n+iB_n}{2}$ y es $(*) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^na_ne^{in\theta} + \sum_{m=-\infty}^{-1} r^{|m|}e^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_mr^{|m|}e^{im\theta}$.

Para calcular los coeficientes, hacemos $r = 1 \implies v(1,\theta) = \varphi(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_me^{im\theta}$.

Por ortogonalidad, teniendo en cuenta que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} = \delta_{m,n}$, obtenemos $a_n = \langle\varphi, e^{in\theta}\rangle = \int_0^{2\pi}\varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta,\ n \in \mathbb{Z}$.

O sea, que queda

$v(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_mr^{|m|}e^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)e^{-ims}ds\right)r^{|m|}e^{im\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im(\theta-s)}\right]ds$, y obtenemos el núcleo que queríamos, $P(r,\theta - s) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im(\theta-s)}$, y se llama **núcleo de Poisson**.

Lema: $P(r,\theta)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$.

$P(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^ne^{in\theta}+\sum_{m=1}^{\infty}r^me^{-im\theta}\overset{z=re^{i\theta}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{m=1}^{\infty}\overline{z^m}\overset{|z|<1}{=}\frac{1}{1-z}+\overline{\frac{z}{1-z}}=\frac{1-\overline{z}+\overline{z}(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}=\frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos\theta}$

Propiedades del núcleo de Poisson: (1) $P(r,\theta)>0$ en $\mathbb{D}$
(2) $P\in C^{\infty}(\mathbb{D})$
(3) $\Delta P=\left(\partial_{rr}+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}\right)P=0$
(4) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta)\,d\theta=1,\ \forall r\in[0,1)$
(5) $\lim_{r\to1^-}P(r,\theta)=\begin{cases}0 & \theta\neq0\\ \infty & \theta=0\end{cases}$

Formalmente, $P(r,\theta)$ es solución de $\begin{cases}\Delta u=0 & en\ \mathbb{D}\\ u_{|\partial\mathbb{D}}=\delta_{\{(1,0)\}}\end{cases}$

Teorema: Solución de PD en $\mathbb{D}$
Sea $\varphi\in C(\partial\mathbb{D})$. Entonces $u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(e^{is}\right)P(r,\theta-s)\,ds$ con $re^{i\theta}\in\mathbb{D}$, cumple
(1) $u\in C^{\infty}(\mathbb{D})$
(2) $\Delta u=0$ en $\mathbb{D}$
(3) $\lim_{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}}u\left(re^{i\theta}\right)=\varphi\left(e^{i\theta_0}\right),\ \forall\theta_0$

Este teorema implica un **principio del máximo y del mínimo**, pues $u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)P(r,\theta-s)\,ds\leq[\max\varphi]\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-s)\,ds\right]=\max\varphi$ (y de igual forma para el mínimo). Entonces $\min_{\partial\mathbb{D}}u\leq u\left(re^{i\theta}\right)\leq\max_{\partial D}u$ y por tanto $\min_{\mathbb{D}}u=\min_{\partial\mathbb{D}}u$ y $\max_{\mathbb{D}}u=\max_{\partial\mathbb{D}}u$.

También implica **regularidad** y **unicidad,** si $\begin{cases}\Delta u^j=0\\ u^j_{|\partial\mathbb{D}}=\varphi^j\end{cases}\implies\sup_{\mathbb{D}}\left|u^1-u^2\right|\leq\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|_{\infty}$

Propiedades de las funciones armónicas

Teorema 1: principio débil del máximo
Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $u\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $\Delta u\geq0$ en Ω. Entonces $\max_{\Omega}u=\max_{\partial\Omega}u$

Caso 1: supongamos $\Delta u(x)>0,\forall x\in\Omega$. Sea $x_0\in\overline{\Omega}$ tal que $\max_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=u(x_0)$. Si $x_0\in\partial\Omega$, ya está. Si $x_0\in\Omega$, entonces es un máximo local, por lo que $\nabla u(x_0)=0$ y $D^2u(x_0)\leq0$, por lo que todos sus valores propios son ≤0, y entonces $\Delta u(x_0)=tr\left(D^2u(x_0)\right)\leq0\#$

Caso general: $\Delta u(x)\geq0$. Dado $\varepsilon>0$, definimos $v_{\varepsilon}(x)=u(x)+\varepsilon|x|^2\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, entonces $\Delta v_{\varepsilon}=\Delta u+2n\varepsilon\geq2n\varepsilon>0$. Por el caso 1, tenemos que $\max_{\overline{\Omega}}u\leq\max_{\overline{\Omega}}v_{\varepsilon}=\max_{\partial\Omega}v_{\varepsilon}\leq\max_{\partial\Omega}u+\varepsilon\max_{\partial\Omega}|x|^2$. Haciendo $\varepsilon\to0$, obtenemos que $\max_{\overline{\Omega}}u\leq\max_{\partial\Omega}u\leq\max_{\overline{\Omega}}u\implies\max_{\overline{\Omega}}u=\max_{\partial\Omega}u$.

Corolario 1: Si $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $u\in C^2(\Omega)\cap C(\Omega)$ con $\Delta u=0$, entonces $\max_{\overline{\Omega}}u=\max_{\partial\Omega}u$ y $\min_{\overline{\Omega}}u=\min_{\partial\Omega}u$.

Corolario 2: unicidad de PD
Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $\varphi\in C(\partial\Omega)$ y $F\in C(\Omega)$. Entonces $\begin{cases}\Delta u=F & en\ \Omega\\ u_{|\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$ tiene, a lo sumo, una solución $u\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Si u_1,u_2 son soluciones, entonces $v=u_1-u_2\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ y $\begin{cases}\Delta v=0 & en\ \Omega\\ v_{|\partial\Omega}=0\end{cases}$ por lo que $\max_{\Omega}v=\min_{\Omega}v=0$ y es $v\equiv0$.

Nota: la unicidad siempre se tiene en el PD si Ω es acotado. Si no es acotado, no siempre hay unicidad. La existencia es un problema más difícil, que requiere de un poco de regularidad en $\partial\Omega$.

Corolario 3: regularidad respecto a cond contorno
Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ acotado, $F_j\in C\left(\overline{\Omega}\right),\ \varphi_j\in C(\partial\Omega),\ u_j\in C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ tales que $\begin{cases}\Delta u_j=F_j & en\ \Omega\\ u_{j_{|\partial\Omega}}=\varphi_j\end{cases}$ para $j=1,2$.
Entonces $\sup_{\Omega}|u_1-u_2|\leq\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\infty}+c_{\infty}\|F_1-F_2\|_{\infty}$

Problema de Neumann: en este caso se conoce $\nabla u\cdot\overrightarrow{n}_{|\partial\Omega}=\varphi$ y el principio del máximo no es útil, pero podemos utilizar métodos de energía.

Lema 1: $div(u\nabla u)=|\nabla u|^2+u\Delta u$

$div(v\nabla u)=\sum_{j=1}^n\partial_{x_j}\left[v\partial_{x_j}u\right]=\sum_{j=1}^n\left(\partial_{x_j}v\partial_{x_j}u+v\partial_{x_jx_j}u\right)=\nabla v\nabla u+v\Delta u$. Tomando $v=u$ sale.

Teorema de la divergencia: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, $\overrightarrow{F} = (F_1, ..., F_n) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} d\sigma = \int_\Omega div\left(\overrightarrow{F}\right) dx$.

Fórmula de Green 1: $\partial\Omega \in C^1, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces $\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) \cdot v - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

Fórmula de Green 2: si $\partial\Omega \in C^1$ y $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ entonces $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} [u(\nabla v \cdot \overrightarrow{n}) - v(\nabla u \cdot \overrightarrow{n})]$

Lema 2: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado con $\partial\Omega \in C^1$ y $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces $\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} u(\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) d\sigma - \int_\Omega u\Delta u$.

$\int_{\partial\Omega} (v\nabla u) \cdot \overrightarrow{n} \overset{TrmDiv}{=} \int_\Omega div(v\nabla u) = \int_\Omega \nabla v \nabla u + v\Delta u$, por tanto $\int_\Omega \nabla v \nabla u = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \overrightarrow{n} - \int_\Omega v\Delta u$. Tomando $v = u$, lo tenemos.

> **Unicidad salvo ctes del PN**
>
> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y conexo, con $\partial\Omega \in C^1$, $F \in C(\Omega), \varphi \in C(\partial\Omega)$. Entonces si $PN \begin{cases} \Delta u = F & en\ \Omega \\ \nabla u \cdot \overrightarrow{n}_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$ tiene dos soluciones $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ se tiene $u_1 - u_2 \equiv cte$.

Sea $v = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, entonces $\begin{cases} \Delta v = 0 & en\ \Omega \\ \nabla v \cdot \overrightarrow{n} = 0 \end{cases}$, por el lema 2, $\int_\Omega |\nabla v|^2 = 0 \implies \nabla v \equiv 0 \implies v \equiv cte$.

La propiedad del valor medio

> **Teorema 1: PVM**
>
> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n, u \in Har(\Omega)$. Entonces $u(x_0) \overset{PVM1}{=} \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x) d\sigma(x) \overset{PVM2}{=} \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx$ para toda $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$

Sea $\phi(r) = ⨍_{\partial B_r(x_0)} u(x) dx, 0 < r < R$. Veamos que $\phi(r) \equiv cte$. En tal caso, haciendo $r \to 0$ tenemos el resultado.

Así, $\phi(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dx \overset{x=x_0+rw, w\in S^{n-1}, d\sigma(x)=r^{n-1}d\sigma(w)}{=} \frac{1}{\cancel{r^{n-1}}|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + rw) \cancel{r^{n-1}} d\sigma(w)$.

Derivando, $\phi'(r) = ⨍_{S^{n-1}} \frac{d}{dr}[u(x_0 + rw)] d\sigma(w) = ⨍_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n u_{x_i} w_i d\sigma(w) = ⨍_{S^{n-1}} \nabla u \cdot \overrightarrow{n} d\sigma(w) =$

$\overset{deshaciendo\ cambio}{=} ⨍_{B_r(x_0)} \nabla u \cdot \overrightarrow{n} d\sigma(x) \overset{trmDiv}{=} \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} div(\nabla u) dx = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u dx \overset{u\in Har(\Omega)}{=} 0$.

Por tanto, ϕ es cte y tenemos el resultado.

Para PVM2: usamos ahora coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$:

$\frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x) dx \overset{x=x_0+rw, dx=r^{n-1}drd\sigma(w)}{=} \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_0^R \overbrace{\left[\int_{S^{n-1}} u(x_0 + rw) d\sigma(w)\right]}^{\int_{\partial B_r(x_0)} u(x)d\sigma(x) \overset{PVM1}{=} |\partial B_r(x_0)| u(x_0)} r^{n-1} dr =$

$= \frac{u(x_0)}{|B_R(0)|} \int_0^R |S^{n-1}| r^{n-1} dr = u(x_0) \frac{|S^{n-1}|}{|B_R(0)|} \frac{R^n}{n}$.

Tomando $u \equiv 1 \in Har(\mathbb{R}^n) \implies |B_R(0)| = \frac{R^n}{n} |S^{n-1}|$. Y entonces, si $u \in Har(\Omega) \implies ⨍_{B_r(x_0)} u = u(x_0)$.

> **Teorema 2: recíproco**
>
> Si $u \in C^2(\Omega)$ cumple $u(x_0) = ⨍_{\partial B_r(x_0)} u d\sigma$ para toda $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, entonces $u \in Har(\Omega)$

Por red abs, sup $\Delta u(x_0) \neq 0$. Podemos suponer $\Delta u(x_0) > 0 \overset{u\in C^2}{\implies} \exists \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega : \Delta u > 0$.

Tomando la ϕ de la demo del PVM, tenemos que $0 = \phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u dx > 0\#$

Nota: también es cierto que $PVM2 \implies u \in Har(\Omega)$.

Además $\Delta u \geq 0 \overset{subPVM1}{\iff} u(x_0) \leq ⨍_{\partial B_r(x_0)} u d\sigma, \ \forall \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega \overset{sPVM2}{\iff} u(x_0) \leq ⨍_{B_r(X_0)} u dx, \ \forall \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$.

La PVM caracteriza las funciones armónicas.

> **Corolario 1: principio fuerte del máximo**
>
> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $u \in Har(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si $\exists x_0 \in \Omega | u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \implies u \equiv cte$

Veamos algo más fuerte: que sPVM2 $\implies u \equiv cte$. Sea $M = \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$.

$M = u(x_0) \overset{sPVM2}{\leq} ⨍_{B_r(x_0)} u dx \leq ⨍_{B_r(x_0)} M dx = M$. Por lo que todo son igualdades, y es $⨍_{B_r(x_0)} (M - u(x)) dx = 0 \implies M - u(x) = 0\ en\ B_r(x_0) \implies u(x) = M\ en\ B_r(x_0)$.

Sea $\mathcal{A} = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$ porque $x_0 \in \mathcal{A}$;$\mathcal{A} = u^{-1}(M)$ es cerrado por ser u continua; $\mathcal{A}$ es abierto porque $x_0 \in \mathcal{A} \implies B_r(x_0) \subset A$, como Ω es conexo, entonces $\mathcal{A} = \Omega$.

Corolario 2: si $u \in Har(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $u \not\equiv cte$ entonces $\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u$

> **Corolario 3: Teorema de Liouville**
>
> Si $u \in Har(\mathbb{R}^n)$ y acotado, entonces $u \equiv cte$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Veamos que $u(x) = u(0)$.

$|u(x) - u(0)| \overset{PVM2}{=} \left| ⨍_{B_r(x)} u - ⨍_{B_r(0)} u \right| = \frac{1}{|B_r|} \left| \int_{B_r(x)} u - \int_{B_r(0)} u \right| = \frac{1}{|B_r|} \left| \int_{B_r(x) \setminus B_r(0)} u + \int_{B_r(0) \setminus B_r(x)} -u \right|$

$\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x) \triangle B_r(0)} |u|$

Ahora bien, $B_r(x) \triangle B_r(0) \subset \{y \in \mathbb{R}^n | r - |x| \leq |y| \leq r + |x|\}$ si $r >> |x|$.

Entonces $|u(x) - u(0)| \leq \|u\|_\infty \frac{(r+|x|)^n - (r-|x|)^n}{r^n} \leq \|u\|_\infty \frac{c_x r^{n-1}}{r^n} \overset{r\to\infty}{\to} 0$

> **Corolario 4: regularidad**
> Si $u \in Har(\Omega)$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$

Probaré que $u \in C(\Omega)$ cumple $PVM1 \implies u \in C^\infty(\Omega)$. Tomo $\phi_R \in C_c^\infty(B_R(0))$ t.q. $\int \phi_R dx = 1$ y ϕ_R radial. Defino $u_R(x) := \int \phi_R(x-y)u(y)dy$ con $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ (bien definido, $sop(\phi_R) \subset B_R(0)$, integro u en $B_R(x)$). Llamo $\Omega_R = \{x \in \Omega / \overline{B_R(x)} \subset \Omega\}$, por (Teo. Der. Paramétricas) $u_R(x) \in C^\infty(\Omega_R)$, veamos $u_R = u$ en Ω_R.

$u_R(x) \underbrace{=}_{\text{CV}} \int \phi(z)u(x-z)dz = \int_0^R \phi_R(r) \underbrace{\int_{S^{n-1}} u(x-rw)d\theta(w)r^{n-1}}_{\int_{\partial B_r(x)} u d\theta} dr \underbrace{=}_{\text{PVM1}} \int_0^R \phi_R(r)u(x)|\partial B_r(x)|dr =$

$u(x)|S^{n-1}| \int_0^R \phi_R(r)r^{n-1}dr = u(x) \underbrace{\int_{B_R(0)} \phi_R}_{1}$. Como $\forall x \in \Omega$ puedo tomar $R/\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, $u \in C^\infty(\Omega)$.

El principio variacional de Dirichlet

Para resolver PD, Dirichlet pensó que entre todas las funciones de la clase $\mathcal{A}_\varphi = \left\{w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : w_{|\partial\Omega} = \varphi\right\}$, la que resuelve PD es la que tiene mínima energía $E(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2$. El siguiente teorema da un método variacional (minimización) para resolver EDPs, implementable numéricamente, buscando sucesiones $u_n : E(u_n) \searrow E(u)$. Es aplicable a muchas EDPs elípticas. Aunque el teorema es condicionado a la existencia de solución o minimizante.

> **Teorema 1: principio de Dirichlet**
> Sea $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y $u \in \mathcal{A}_\varphi$. Son equivalentes: (1) $\Delta u = 0$ y (2) $E(u) = \min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 : w \in \mathcal{A}_\varphi\right\}$.

(1) $\implies$ (2) Sea $w \in \mathcal{A}_\varphi$ y definimos $g = w - u \in C^1(\overline{\Omega}) \implies g_{|\partial\Omega} = 0$. Entonces $E(w) = E(u+g) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \nabla g|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla g|^2 + 2\nabla u \nabla g = E(u) + E(g) + \int_\Omega \nabla u \nabla g =$

$\overset{Green1}{=} E(u) + E(g) + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) g - \int_\Omega (\Delta u) g$

Ahora bien, $E(g) \geq 0$, como $g_{|\partial\Omega} = 0$, entonces $\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) g = 0$, y $\Delta u = 0$, por lo que $\int_\Omega (\Delta u) g = 0$. Así, queda que $E(w) \geq E(u)$.

(2) $\implies$ (1) Sea $g \in C_c^2(\Omega)$ (funciones C^2 con soporte compacto), por lo que $g_{|\partial\Omega} \equiv 0$. Considero $I(t) = E(u+tg)$ con $t \in \mathbb{R}$, que es una función de una variable, y notemos que $u + tg \in \mathcal{A}_\varphi$. Como $\min_{t\in\mathbb{R}} I(t) = I(0)$, entonces $I'(0) = 0$. Así, $I'(0) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tg)|^2\right]_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + t\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla g + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla g|^2\right]_{t=0} = \left[\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla g + t\int_\Omega |\nabla g|^2\right]_{t=0} =$

$= \int_\Omega \nabla u \nabla g \overset{Green1}{=} -\int_\Omega (\Delta u) g + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) g \overset{g_{|\partial\Omega}=0}{=} -\int_\Omega (\Delta u) g$.

O sea $0 = I'(0) = -\int_\Omega (\Delta u) g,\ \forall g \in C_c^2(\Omega) \implies \Delta u \equiv 0$ en Ω.

Problema de Plateau (superficies mínimas): dado $\varphi \in C(\partial\Omega)$, buscamos $\min\left\{\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} : u \in C^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = \varphi\right\}$.

Para $u \in \mathcal{A}_\varphi$ equivale a resolver la EDP no lineal $div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$ en Ω.

Operador p-Laplaciano, $1 < p < \infty$: buscamos la EDP que corresponde a minimizar $E(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx$, obteniendo la EDP no lineal $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = 0$ en Ω.

Nota: ¿cuándo existe un minimizante de $E_0 = \min\left\{E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in C^2(\Omega), u_{|\partial\Omega} = \varphi\right\}$**?** Riemann afirmó que tales minimizantes siempre existen, pero Weierstrass y otros dieron contraejemplos. El problema es la compacidad de $\mathcal{A}_\varphi$: el punto límite de una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{A}_\varphi : E(u_n) \searrow E_0$ podría no pertenecer a $\mathcal{A}_\varphi$. Es necesario trabajar en **espacios de Sobolev**: $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}$. Usando análisis funcional se prueba que siempre existe $\min\left\{E(u) : u \in H^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = \varphi\right\}$, aunque este minimizante es solo **solución débil** de $\Delta u = 0$.

Función de Green: se denomina **solución fundamental de Δ en** $\mathbb{R}^n$ a $K(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donde $c_n = \frac{-1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}$ para $n \neq 2$, o bien $K(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si $n = 2$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}^n \implies K_{x_0}(x) = K(x - x_0) \in Har(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$.

> **Teorema 1: Fórmula de Green 3**
> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ entonces $u(x_0) = \int_\Omega \Delta u(x) \cdot K_{x_0}(x)dx + \int_{\partial\Omega} [u \cdot D_{\overrightarrow{n}} K_{x_0} - K_{x_0} \cdot D_{\overrightarrow{n}} u] d\sigma$, $\forall x_0 \in \Omega$. ($D_{\overrightarrow{n}} F = \nabla F \cdot \overrightarrow{n}$)

Nota: si conocemos $\Delta u = f, u_{|\partial\Omega} = \varphi, \nabla u \cdot \overrightarrow{n} = g$, entonces obtenemos una fórmula explícita $u(x_0) = \int_\Omega f \cdot K_{x_0} + \int_{\partial\Omega} [\varphi \cdot (\nabla K_{x_0} \cdot \overrightarrow{n}) - K_{x_0} \cdot g] \, d\sigma$, que es un candidato a resolver PD o PN o ProbPoisson (no homog) en cualquier dominio Ω general.

Aunque en la práctica solo se conoce una condición en $\partial\Omega$, o bien $u_{|\partial\Omega} = \varphi$ o bien $\nabla u \cdot \overrightarrow{n}_{|\partial\Omega} = g$. ¿Podemos encontrar variantes con solo una condición? La demostración es válida también tomando $v = K_{x_0} + \nu(x)$, donde $\nu \in Har(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Si tomamos ν adecuado podremos eliminar un término de frontera.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $PD(x_0, \Omega)$ tiene solución $\nu = \nu_{\Omega, x_0}, \ \forall x_0 \in \Omega$. Se define la **solución de green** de Ω como $G_\Omega(x; x_0) = K(x - x_0) + \nu_{\Omega, x_0}(x), \ x \in \Omega$.

CAPÍTULO 4: TEORÍA DE LAS SERIES DE FOURIER

El objetivo ahora es, dada una función $f : [0, L] \to \mathbb{R} \ o \ \mathbb{C}$, determinar cuándo se tiene
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$.

Fourier afirmó que es cierto para toda función f, pero sin demostración rigurosa. Deben obtener respuesta varias preguntas: ¿cuándo converge la serie? ¿converge a f? ¿Condiciones para f?

Por convención se define $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(L\mathbb{Z}) \equiv [0, L)$ y $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ significa $f : [0, L) \to \mathbb{C}$ extendida de forma L-periódica. A veces se reemplaza $\mathbb{T} \equiv [0, L)$ por $\mathbb{T} \equiv \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$. Nosotros usamos $L = 1$.

Lema: si f es L-periódica, entonces $\int_a^{a+L} f(x) \, dx = \int_0^L f(x) \, dx =: \int_\mathbb{T} f(x) \, dx$.

Se define $L^1(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \ medible | \int_\mathbb{T} |f(x)| \, dx < \infty\right\}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, se define su **serie de Fourier compleja** como $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(n) e^{2\pi i n x}$ donde $\tilde{f}(n) = \int_\mathbb{T} f(y) e^{-2\pi i n y} dy$ para $n \in \mathbb{Z}$ se denomina el **n-ésimo coeficiente de Fourier** de f.

Lema: aproximación por funciones simples: si $f \in L^1(0, 1)$ entonces existen funciones simples $s_1, s_2, ...$ tales que (1) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ en casi todo punto (ctp) $x \in (0, 1)$ y (2) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - s_n(x)| \, dx = 0$.

Lema de Riemann-Lebesgue: si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_{|n|\to\infty} \tilde{f}(n) = 0$.

Caso $f = \mathcal{X}_{(a,b)}$: $\tilde{f}(n) = \int_a^b e^{-2\pi i n x} dx = \left[-\frac{e^{-2\pi i n x}}{2\pi i n}\right]_a^b = \frac{e^{-2\pi i n a} - e^{-2\pi i n b}}{2\pi i n}$ por lo que $\left|\tilde{f}(n)\right| \le \frac{1}{\pi|n|} \overset{|n|\to\infty}{\to} 0$.

Por tanto, si s es función simple, entonces $\lim_{|n|\to\infty} \tilde{s}(n) = 0$.

Caso $f \in L^1(\mathbb{T})$: dado $\varepsilon > 0, \exists s$ función simple tal que $\|f - s\|_{L^1} < \varepsilon$. También sabemos que $\exists n_0$ tal que $|\tilde{s}(n)| < \varepsilon, \ \forall |n| > n_0$. Por tanto, para $|n| > n_0$, se tiene $\left|\tilde{f}(n)\right| = \left|f \tilde{-} s(n) + \tilde{s}(n)\right| \le \int_0^1 |f(x) - s(x)| \left|e^{-2\pi i n x}\right| dx + |\tilde{s}(n)| = \|f - s\|_{L^1} + |\tilde{s}(n)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

> **Teorema 1: criterio de Dini 1**
> Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es derivable en x_0, entonces $\exists \lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-N}^{M} \tilde{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = f(x_0)$

Notar que
$S_{N,M} f(x) = \sum_{n=-N}^{M} \tilde{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^{M} \int_\mathbb{T} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \cdot e^{2\pi i n x} = \int_\mathbb{T} f(y) \sum_{n=-N}^{M} e^{2\pi i n (x-y)} dy = \int_\mathbb{T} f(x - t) D_{N,M}(t) \, dt$

$D_{N,M}$ es el **núcleo de Dirichlet (asimétrico)**, y tiene dos propiedades útiles (1) $\int_\mathbb{T} D_{N,M}(t) \, dt = 1, \ \forall N, M \in \mathbb{N}$ y (2) $D_{N,M}(t) = \frac{e^{2\pi i (M+1) t} - e^{-2\pi i N t}}{e^{2\pi i t} - 1}$ si $t \neq 0 \mod \mathbb{Z}$.

Así, $S_{N,M} f(x_0) - f(x_0) = \int_\mathbb{T} f(x_0 - t) D_{N,M}(t) \, dt - f(x_0) \overbrace{\int_\mathbb{T} D_{N,M}(t) \, dt}^{=1} = \int_\mathbb{T} [f(x_0 - t) - f(x_0)] D_{N,M}(t) \, dt = $
$\overset{(2)}{=} \int_\mathbb{T} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{e^{2\pi i t} - 1} \left(e^{2\pi i (M+1) t} - e^{-2\pi i N t}\right) dt = (*)$

Llamando $g(t) = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{e^{2\pi i t} - 1}$, entonces $(*) = \tilde{g}(-M - 1) - \tilde{g}(N)$ y si probamos que $g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces, por el lema RL, $\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M} f(x_0) - f(x_0) = \lim_{N,M\to\infty} \tilde{g}(-M - 1) - \tilde{g}(N) = 0$.

Sea $t \in \mathbb{T}$, por hipótesis, f es derivable en x_0, entonces $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \frac{t}{e^{2\pi i t} - 1} = -f'(x_0) \frac{1}{2\pi i}$ por lo que g es acotada cerca de $t = 0$: $\exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} |g(t)| \, dt < \infty$, y en el resto de puntos, $\delta \le |t| \le \frac{1}{2}$, el denominador no se anula ($h(t) \neq 0$), y por continuidad $\exists c_\delta > 0 : |h(t)| \ge c_\delta, \ \forall \delta \le |t| \le \frac{1}{2}$. Por tanto, $\int_{\delta \le t \le \frac{1}{2}} |g(t) \, dt| \le \frac{1}{c_\delta} \int_\mathbb{T} |f(x_0 - t) - f(x_0)| \, dt \le \frac{\|f\|_{L^1} - |f(x_0)|}{c_\delta} < \infty$ y tenemos el resultado.

Nota: el criterio es válido con hipótesis más generales que la derivabilidad, como solo necesitamos que $\exists \delta > 0 : g(t) \in L^1(-\delta, \delta)$ basta la **condición de Dini**: $\exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t}\right| dt < \infty$

Nota: no vale con pedir continuidad, el Teorema de Bois-Reymond prueba que existen funciones continuas con $\lim_{N\to\infty} |S_N f(0)| = \infty$. Más aún, el de Kolmogorov prueba que existen funciones L^1 tales que $\lim_{N\to\infty} |S_N f(x)| = \infty, \ \forall x \in \mathbb{T}$.

El teorema que cierra la teoría es el de Carleson: $f \in C(\mathbb{T}) \implies \exists \lim_{N\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ ctp $x \in \mathbb{T}$.

> **Teorema 2: criterio de Dini 2**
> Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(x_0)^{\pm}$ y $f'(x_0)^{\pm}$, entonces $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \frac{f(x_0)^- + f(x_0)^+}{2}$

$S_N f(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}(n) e^{2\pi i n x_0} = \sum_{n=-N}^{N} \int_\mathbb{T} f(x) e^{-2\pi i n (x - x_0)} dx = \sum_{n=-N}^{N} \int_\mathbb{T} f(x_0 + y) e^{-2\pi i n y} dy =$

$= \sum_{n=-N}^{N}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(...)+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(...)\right] = \sum_{n=-N}^{N}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f(x_0+y)-f\left(x_0^+\right)\right)e^{-2\pi iny}dy + f\left(x_0^+\right)\sum_{n=-N}^{N}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi iny}dy +$
$+\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(f(x_0+y)-f\left(x_0^-\right)\right)e^{-2\pi iny}dy + f\left(x_0^-\right)\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^{-2\pi iny}dy$

Por lo que $S_N f(x_0) = \frac{f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)}{2} + \sum_{n=-N}^{N}\int_0^{\frac{1}{2}}\overbrace{\left[\frac{f(x_0+y)-f\left(x_0^+\right)}{e^{2\pi iy}-1}\right]}^{g_1(y)}\left(e^{2\pi iy}-1\right)e^{-2\pi iny}dy +$

$+\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\overbrace{\left[\frac{f(x_0+y)-f\left(x_0^-\right)}{e^{2\pi iy}-1}\right]}^{g_2(y)}\left(e^{2\pi iy}-1\right)e^{-2\pi iny}dy.$ Y definimos $g(y) = \begin{cases} g_1(y) & y \in \left(0,\frac{1}{2}\right) \\ g_2(y) & y\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\end{cases}$, $g \in L^1(\mathbb{T})$?

Tenemos $S_N f(x_0) = \frac{f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)}{2} + \sum_{n=-N}^{N}\left[\tilde{g}(n-1)-\tilde{g}(n)\right] = \frac{f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)}{2} + \tilde{g}(-N-1)-\tilde{g}(N)$ y si $g\in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\tilde{g}(-N-1)-\tilde{g}(N) \overset{N\to\infty}{\to} 0$ y tendremos el resultado.

Si $y>0$, entonces $g(y) = g_1(y) = \frac{f(x_0+y)-f\left(x_0^+\right)}{y}\frac{y}{2^{2\pi iy}-1} \to f'\left(x_0^+\right)\frac{1}{2\pi i} \implies \exists\delta>0 : g(y) < M, \forall y\in(0,\delta) \implies \int_0^{\delta}|g(y)|\,dy < \infty$.
Si $y<0$, igual.
Si $\delta \le |y| \le \frac{1}{2}$, entonces $|h(y)| = \left|e^{2\pi iy}-1\right| \ge m \implies \int_{\delta\le|y|\le\frac{1}{2}} \le \frac{1}{m}\int_{\mathbb{T}}\left(|f(y+x_0)|+\left|f\left(x_0^+\right)\right|\right)dy < \infty$ y juntando todo esto tenemos $g\in L^1(\mathbb{T})$ y el resultado.

Fórmula de Parseval
Si $f\in L^2(\mathbb{T})$ entonces $\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\tilde{f}(n)\right|^2$

Derivación de integración de SF

Lema1: si $f\in C^K(\mathbb{T})$ entonces $\widetilde{f^{(k)}}(n) = (2\pi in)^k\,\tilde{f}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Además, $\left|\tilde{f}(n)\right| \le \frac{c_f}{|n|^k}$, $n\ge 1$.

Corolario: si $f\in C^2(\mathbb{T})$ entonces $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(n)\,e^{2\pi inx}$, $\forall x\in\mathbb{T}$ con convergencia uniforme y absoluta.

Corolario 2: si $f\in C^{N+2}(\mathbb{T})$ entonces para $0\le k\le N$ se tiene $f^{(k)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(n)\,(2\pi in)^k\,e^{2\pi inx}$, $\forall x\in\mathbb{T}$ uniforme y absolutamente.

Lema2: sea $f\in L^1(\mathbb{T})$ con $\int_{\mathbb{T}} f = 0$, y sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Entonces $\tilde{F}(n) = \frac{\tilde{f}(n)}{2\pi in}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. En particular, $F(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{\tilde{f}(n)}{2\pi in}e^{2\pi inx}+C_0$

F es periódica y $F(0)=0, F(1)=\int_0^1 f = 0 \implies F\in C(\mathbb{T})$ y para $n\ne 0$ es $\tilde{F}(n) = \int_0^1 F(x)\,e^{-2\pi inx}dx = \int_0^1\int_0^x f(t)\,dt e^{-2\pi inx}dx \overset{Fubini, 0<t<x<1}{=} \int_0^1 f(t)\left(\int_0^1 e^{-2\pi inx}dx\right)dt =$
$= \int_0^1 f(t)\,\frac{e^{-2\pi in}-e^{-2\pi int}}{-2\pi in}dt = \frac{\tilde{f}(0)-\tilde{f}(n)}{-2\pi in} = \frac{\tilde{f}(n)}{2\pi in}$.
Nota: la cte C_0 se calcula a mano. La serie integral siempre converge uniformemente en todo $\mathbb{T}$.
Cuando $\int_{\mathbb{T}} f\ne 0$, se aplica el teorema a $g(x) = f(x)-\tilde{f}(0) \implies F(x)-\tilde{f}(n)\,x \sim \sum_{n\ne 0}\frac{\tilde{f}(n)-\tilde{f}(0)}{2\pi in}e^{2\pi inx}+C_0$ converge uniformemente en $\mathbb{T}$.

Unicidad de las SF

Teorema: Sean $f,g\in L^1(\mathbb{T})$. Entonces $\left\{\begin{array}{c}\tilde{f}(n)=\tilde{g}(n)\\ \forall n\in\mathbb{Z}\end{array}\right\} \implies f\equiv g$

Sea $h = f-g\in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\tilde{h}(n) = 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Veamos que $h\equiv 0$.
caso1: $h\in C^1(\mathbb{T})$ (o derivable), por el DINI1 es $h(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\tilde{h}(n)\,e^{2\pi inx}\equiv 0$, $\forall x\in\mathbb{T}$
caso2: $h\in C(\mathbb{T})$, definimos la primitiva $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt\in C^1(\mathbb{T})$ y periódica, pues $\tilde{h}(0)=0$. Entonces $\tilde{H}(n) = \frac{\tilde{h}(n)}{2\pi in}, n\ne 0$ y por DINI1 es $H(x)\equiv\tilde{H}(0) = cte \overset{TFC}{\implies} 0 = H'(x) = h(x)$
caso3: $h\in L^1(\mathbb{T})$, la resuelve el siguiente **lema: TFC-Lebesgue:** $f\in L^1(0,1) \implies F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es derivable ctp x y $F'(x) = f(x)$ ctp x.

Series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$

$L^2(\mathbb{T}) = \left\{f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}\ medible : \int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$

Tiene las siguientes propiedades: (1) tiene norma y producto escalar $\|f\|_{L^2} = \left[\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ y $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,\overline{g(x)}dx$. (2) es un espacio completo. (3) $L^2(\mathbb{T})\subsetneq L^1(\mathbb{T})$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\int_{\mathbb{T}}|f(x)|\,dx \le \left[\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ se tiene [$\subset$] y para ver [$=$] basta tomar $f(x)=|x|^{\frac{-1}{2}}$.

Lema: desigualdad de Cauchy-Schwarz: si $f,g\in L^2(\mathbb{T})$ entonces $\int_{\mathbb{T}}|f(x)g(x)|\leq\left(\int_{\mathbb{T}}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{T}}|g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Espacios de Hilbert: la teoría de SF en $L^2(\mathbb{T})$ es un caso especial de la teoría de bases ortonormales en un espacio de Hilbert.

Sea $(\mathbb{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con un producto escalar (1)lineal 1ª: $\langle a_1f_1+a_2f_2,g\rangle=a_1\langle f_1,g\rangle+a_2\langle f_2,g\rangle$. (2) antilineal 2ª: $\langle f,a_1g_1+a_2g_2\rangle=\overline{a_1}\langle f,g_1\rangle+\overline{a_2}\langle f,g_2\rangle$. (3)hermítico: $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$. (4) definido positivo: $\langle f,f\rangle\geq 0,\forall f\in\mathbb{H}$ y $\langle f,f\rangle=0\iff f=0$.

Se define la norma asociada al producto escalar $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$. Se dice que $\mathbb{H}$ es un **espacio de Hilbert** si la norma es completa, o sea, toda sucesión de Cauchy es convergente.

(1) $f\perp g$ si $\langle f,g\rangle=0$

(2)$\{e_j\}_{j\in J}\subset\mathbb{H}$ es un **sistema ortonormal SON** si $\langle e_j,e_k\rangle=\delta_{j,k},\ \forall j,k\in J$

(3)$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una **base ortonormal BON** si es SON y $\forall f\in\mathbb{H},\exists a_j\in\mathbb{C}:f=\sum_{j=1}^{\infty}a_je_j$

Lema de ortogonalidad 1: si $f,g\in\mathbb{H}$ entonces $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2+2Re\left[\langle f,g\rangle\right]$

$\|f+g\|^2=\langle f+g,f+g\rangle=\langle f,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle+\langle g,g\rangle=\|f\|^2+\|g\|^2+\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}=\|f\|^2+\|g\|^2+2Re\left[\langle f,g\rangle\right]$

Corolario: identidad de Pitágoras: (1) si $f\perp g\implies\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$. (2) si $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ son OG dos a dos entonces $\left\|\sum_{n=1}^{N}f_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2$.

Lema de ortogonalidad 2: si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es SON y $f=\sum_{j=1}^{\infty}a_je_j$ entonces (1) $a_j=\langle f,e_j\rangle,\forall j$ y (2) $\|f\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\langle f,e_j\rangle|^2$

Si $\{e_j\}_1^{\infty}$ es SON y $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$ entonces $\langle f,e_j\rangle=\langle\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n,e_j\rangle\underbrace{=}_{\langle\cdot,\cdot\rangle\text{ cont en }\|\|_2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\langle e_n,e_j\rangle}_{\delta_{n,j}}=a_j,\forall j\in\mathbb{N}$. $\|f\|^2=\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle fe_n,e_n\rangle\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\langle f,e_n\rangle\|^2\underbrace{\|e_n\|^2}_{1}$ aplicando Pitágoras al sacar el límite porque la serie converge.

Lema de ortogonalidad 3: desigualdad de Bessel: si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es SON, entonces $\sum_{j=1}^{\infty}|\langle f,e_j\rangle|^2\leq\|f\|^2,\forall f\in\mathbb{H}$. Además, si $S_Nf=\sum_{j=1}^{N}\langle f,e_j\rangle e_j$, entonces se tiene $\|f-S_Nf\|^2=\|f\|^2-\sum_{j=1}^{N}|\langle f,e_j\rangle|^2$

Lo segundo implica lo primero tomando límites.

$\|f-S_Nf\|^2=\|f\|^2+\|S_Nf\|^2-2Re\langle f,S_Nf\rangle$, y $\langle f,S_Nf\rangle=\sum_{n=1}^{N}\overline{\langle f,e_n\rangle}\langle f,e_n\rangle=\sum_{n=1}^{N}\|\langle f,e_n\rangle\|^2=\|S_Nf\|^2$. Observando que esta última norma es real ya lo tenemos.

Teorema 1: caracterización de BON: sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$un SON. Entonces son equivalentes (1) $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es BON. (2) $\|f\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\langle f,e_j\rangle|^2,\forall f\in\mathbb{H}$. (3) $f\in\mathbb{H}$ y $\langle f,e_j\rangle=0,\ \forall j\implies f=0$

[$1\implies 2$] $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n,a_n=\langle f,e_n\rangle\ \forall n$. Por definición de convergencia $0=\lim_{N\to\infty}\|f-\sum_{n=1}^{N}a_ne_n\|^2=\lim_{N\to\infty}\|f-S_Nf\|^2\overset{LemaBessel}{=}\lim_{N\to\infty}\left(\|f\|^2-\sum_{n=1}^{N}\|\langle f,e_n\rangle\|^2\right)$

[$2\implies 3$] Obvio.

[$3\implies 1$] $f\in\mathbb{H}$, $g_n:=\sum_{n=1}^{N}\langle f,e_j\rangle e_j$, hay que ver que $g_N\to f$ en $\|\cdot\|$. $\|g_N-g_M\|^2=\|\sum_{n=N+1}^{M}\langle f,e_n\rangle e_n\|^2=\sum_{n=N+1}^{M}\|\langle f,e_n\rangle\|^2\to 0$ si $M\geq N\to\infty$. Como es de Cauchy en un espacio completo converge a cierta $g\in\mathbb{H}$, y por definición de convergencia $g=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n$. Entonces $\langle g,e_n\rangle=\langle f,e_n\rangle,\forall n\in\mathbb{N}$, luego la resta tiene todos los coeficientes nulos y $g=f$.

Corolario 1: $\left\{e^{2\pi inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es BON de $L^2(\mathbb{T})$, o sea, $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(n)e^{2\pi inx}$ en $\|\cdot\|_{L^2},\forall f\in L^2(\mathbb{T})$.

Corolario 2: identidad de Parseval general: si $f,g\in L^2(\mathbb{T})$, entonces $\int_{\mathbb{T}}f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(n)\overline{\tilde{g}(n)}$

Si $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ es BON y $f,g\in\mathbb{H}$ entonces $\langle f,g\rangle=\langle\lim_{N\to\infty}S_Nf,g\rangle=\lim_{N\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{N}\langle f,e_j\rangle e_j,g\right\rangle=$

$=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\langle f,e_j\rangle\langle e_j,g\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,e_j\rangle\overline{\langle g,e_j\rangle}$ y esta serie converge absolutamente por las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Bessel.

Corolario 3: criterio de convergencia uniforme: si $f\in C^1(\mathbb{T})$ entonces $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(n)e^{2\pi inx}$ unif y abs en $\mathbb{T}$

Por Dini 1 tenemos conv. puntual.

$\left\|\sum_{N\leq|n|\leq M}\tilde{f}(n)e^{2\pi inx}\right\|\leq\sum_{N\leq|n|\leq M}\left\|\tilde{f}(n)\right\|=\sum_{N\leq|n|\leq M}\left\|\tilde{f}(n)2\pi in\right\|\frac{1}{2\pi|n|}\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq}$

$\leq\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f'}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|n|\geq N}\frac{1}{|2\pi n|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq|f'|_{L^2(\mathbb{T})}\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^2}\right]$

Lo último es la cola de una serie convergente, tiende a 0 si $N \to \infty$, luego la serie original es de Cauchy unif+abs, así que es convergente unif+abs.

Corolario 4: SF reales: $\{1, \cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)\}_{n\geq 1}$ es BOG de $L^2(\mathbb{T})$ (sin normalizar). En particular, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx))$ en $\|\cdot\|_{L^2}$

CAPÍTULO 5: CONVOLUCIONES Y SF

Si $K, f \in L^1(\mathbb{T})$ se define su **convolución** como $K * f(x) = \int_{\mathbb{T}} K(x-y) f(y)\,dy$ para $x \in \mathbb{T}$ siempre que la integral sea absolutamente convergente. Esta misma definición puede utilizarse en $\mathbb{R}^n$.

Interpretación: en general, si $\int K(x)\,dx = 1$ entonces $K * f(x) \approx$promedio de f en torno a x, ponderado por el peso K.

Ejemplos: (1)sumas parciales de Fourier: $S_N f(x) = \sum_{|n|\leq N} \tilde{f}(n) e^{2\pi inx} = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-y) f(y)\,dy$ con $D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} e^{2\pi inx}$ se llama núcleo de Dirichlet de orden N.

(2)solución de EDP del calor en $\mathbb{R}^n$: la ecuación del calor $\begin{cases} u_t = \Delta u & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ tiene como solución $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-y) f(y)\,dy$ con $W_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es el núcleo de Gauss-Weierstras.

(3)solución EDP de Laplace en $\mathbb{D}$: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \mathbb{D} \\ u_{|\partial \mathbb{D}} = \varphi \end{cases}$ entonces $u(r,\theta) = ⨍_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(t)\,dt$ con $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$ es el núcleo de Poisson.

(4)promedios sobre bolas: $⨍_{B_\varepsilon(x)} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B_\varepsilon(0)|} 1_{B_\varepsilon(0)}(x-y) f(y)\,dy$.

Propiedades

Proposición 1: si $K, f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\exists K * f(x)$ ctp $x \in \mathbb{T}$. Además, $\|K * f\|_{L^1} \leq \|K\|_{L^1} \|f\|_{L^1}$

Veamos que $I(x) = \int_{\mathbb{T}} |K(x-y) f(y)|\,dy < \infty$ ctp $x \in \mathbb{T}$. Integrando, es

$0 \leq \int_{\mathbb{T}} I(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)| |f(y)|\,dy\right] dx \overset{Fubini-Tonelli}{=} \int_{\mathbb{T}} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)|\,dx\right] dy$.

Pero $\int_{\mathbb{T}} |K(x-y)|\,dx \overset{x-y=z}{=} \int_{x-\mathbb{T}} |K(z)|\,dz = \|K\|_{L^1}$. Por tanto, es $0 \leq \int_{\mathbb{T}} I(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} |f(y)| \|K\|_{L^1}\,dy = \|K\|_{L^1} \|f\|_{L^1} < \infty$ ctp $x \in \mathbb{T}$.

Y $\int_{\mathbb{T}} |K * f(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{T}} I(x)\,dx \leq \|K\|_{L^1} \|f\|_{L^1}$

Proposición 2: si $K, f, g \in L^1(\mathbb{T})$ entonces (1)***conmutatividad*** : $K * f(x) = f * K(x)$, (2)***asocitatividad*** : $K * (f * g)(x) = (K * f) * g(x)$, (3)***fourier*** : $(\widetilde{K * f})(n) = \tilde{K}(n) \tilde{f}(n), n \in \mathbb{Z}$

Corolario: si $f, K \in L^1(\mathbb{T})$ y $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n) e^{2\pi inx}$ entonces $K * f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{K}(n) \tilde{f}(n) e^{2\pi inx}$

Proposición 3: derivación: si $K \in C^M(\mathbb{T}), f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $K * f \in C^M(\mathbb{T})$ y $D^{(m)}[K * f(x)] = \left(D^{(m)} K\right) * f(x), \ \forall 0 \leq m \leq M$

Aproximaciones de la Identidad

$\{K_N\}_{N\geq 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ es una **aproximación de la identidad AI** si (1) $\int_{\mathbb{T}} K_N(y)\,dy = 1, \forall N \geq 1$, (2) $A = \sup_{N\geq 1} \int_{\mathbb{T}} |K_N(y)|\,dy < \infty$, (3) $\forall \delta > 0 \implies \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |K_N(y)|\,dy = 0$.

Intuitivamente, es una sucesión de funciones que tiende a una $\delta_{\{0\}}$.

Ejemplos: (1)**promedios:** $K_N = \frac{1}{2\varepsilon_N} 1_{(-\varepsilon_N, \varepsilon_N)}$ con $\varepsilon_N \searrow 0$.

(2)**Núcleo de Poisson:** $K_N(t) = P_{r_N}(2\pi t)$ con $r_N \nearrow 1$ y $P_r(2\pi t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi t)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2\pi int}$ para $|t| \leq \frac{1}{2}$.

(3)**Núcleo de Gauss-Weierstrass:** $W_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}, x \in \mathbb{R}$ (cambio $x = \sqrt{t}z$) y sale.

(4)Núcleo de Dirichlet: $D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} e^{2\pi inx} = \frac{\sin(2N\pi)\pi x}{\sin(\pi x)}, x < \frac{1}{2}$ **no** verifica el punto 2 y no es AI.

Lema: si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int \varphi = 1$, entonces $\varphi_{\varepsilon_N}(x) = \frac{1}{\varepsilon_N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_N}\right), \varepsilon_N \overset{N\to\infty}{\to} 0$ es AI.

1: $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\varepsilon_N}(x)\,dx \overset{z=\frac{x}{\varepsilon_N}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\,dz = 1$. 2: $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{\varepsilon_N}(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)|\,dx \overset{\varphi\in L^1}{<} \infty$.

3: $\int_{|x|\geq\delta} |\varphi_{\varepsilon_N}(x)|\,dx = \int_{|z|\geq\frac{\delta}{\varepsilon_N}} |\varphi(x)|\,dz \overset{TCD}{\underset{N\to\infty}{\to}} 0$.

Teorema 1: convergencia de AI: sea $\{K_N\}_{N\geq 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ una AI, entonces (1)si f acotada y continua en un punto $x_0 \in \mathbb{T}$, entonces $\lim_{N\to\infty} K_N * f(x_0) = f(x_0)$, (2)si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces la igualdad es cierta uniformemente $\forall x \in \mathbb{T}$, (3)si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces la igualdad es cierta en la norma de $L^1(\mathbb{T})$.

(1) Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 | \left| f(x_0 + h) - f(x_0) \right| < \varepsilon,\ \forall |h| < \varepsilon$, por la continuidad de f en x_0. Entonces

$\left| K_N * f(x_0) - f(x_0) \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - y) K_N(y)\, dy - f(x_0) \overbrace{\left[\int_{\mathbb{T}} K_N(y)\, dy \right]}^{=1} \right| = \left| \int_{\mathbb{T}} (f(x_0 - y) - f(x_0)) K_N(y)\, dy \right| \le \int_{\mathbb{T}} |...|\, dy =$

$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \, |K_N(y)|\, dy + \int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \, |K_N(y)|\, dy \le$

$\le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |K_N|\, dy + 2 \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |K_n|\, dy = (*)$

Ahora bien, $\int_{-\delta}^{\delta} |K_N|\, dy \le \int_{\mathbb{T}} |K_N|\, dy \le A$ y por (3) en la def de IA, $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, x_0, \|f\|_\infty) : \int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |K_N| \le \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty},\ \forall N > N_0$. por tanto $(*) \le (A+2)\varepsilon$ si $N > N_0$.

(2)Si $f \in C(\mathbb{T}) \implies f \in UC(\mathbb{T})$ y acotada, y el δ de (1) podemos tomarlo independiente de x_0, y por tanto el N_0 independiente de x_0. Así, igual que antes, se tiene $\lim_N K_N * f(x_0) = f(x_0)$ uniformemente $\forall x_0 \in \mathbb{T}$.

(3) Necesitamos un lema de integral de Lebesgue: **lema:** $f \in L^1(\mathbb{T}) \implies \lim_{|h|\to 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$**.**

Y usando este lema la prueba es como la de (1).

> **Teorema 1.1:** sea $\{K_N\}_{N\ge 1} \subset L^1(\mathbb{T})$ una AI, con núcleos pares $K_N(x) = K_N(-x)$. entonces, si f acotada y existen $f\left(x_0^{\pm}\right)$, se tiene $\lim_{N\to\infty} K_N * f(x_0) = \frac{f\left(x_0^-\right) + f\left(x_0^+\right)}{2}$

El núcleo de Dirichlet

El núcleo de Dirichlet es $D_N(x) = \sum_{|n|\le N} e^{2\pi i n x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

> **Propiedades:** (1)$\int_{\mathbb{T}} D_N(x)\, dx = 1$
> (2) $D_N(x) = D_N(-x)$
> (3) $D_N(0) = 2N+1$
> (4) $D_N(x) = 0 \iff x \in \left\{ \frac{\pm 1}{2N+1}, ..., \frac{\pm N}{2N+1} \right\}$
> (5) $\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|\, dx \approx \log(N+1) \to \infty$

> **Lema 1:** $L_N = \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|\, dx \ge \frac{4}{\pi^2} \log(N+1)$

Uso $\frac{|u|}{\pi/2} \le |\sin u| \le |u|, \forall |u| \le \frac{\pi}{2}$. $\int_0^{\frac{1}{2}} |D_N| \ge \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\frac{n}{2N+1}}^{\frac{n+1}{2N+1}} \frac{|\sin((2N+1)\pi x)|}{|\sin(\pi x)|} dx \underbrace{\ge}_{|\sin \pi x| \le \pi |x|} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\frac{\pi(j+1)}{2N+1}} \int_{\frac{n}{2N+1}}^{\frac{n+1}{2N+1}} |\sin((2N+1)\pi x)| dx \underbrace{=}_{(2N+1)\pi x = u} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} |\sin u| du = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(N+!)$

Nota: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ es el prototipo de función $f \notin L^1(0,\infty)$ pues $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ pero $f \in \mathcal{R}(0,\infty)$ en el sentido $\exists \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. De hecho, D_N y f están relacionadas:

> **Lema 2:** $\int_0^a D_N(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi a} \frac{\sin x}{x} dx + O\left(\frac{1}{N}\right)$ uniformemente en $|a| \le \frac{1}{2}$. En particular, se tiene $\sup_{N\ge 1} \sup_{|a|,|b| \le \frac{1}{2}} \left| \int_a^b D_N(x)\, dx \right| < \infty$

> **Teorema 1: criterio de Dirichlet-Jordan**
> Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.
> (1) Si f es creciente (o decreciente) en un entorno de $x = a$, entonces $\exists \lim_{N\to\infty} S_N f(a) = \frac{f\left(a^-\right) + f\left(a^+\right)}{2}$
> (2) Si f es creciente (o decreciente) en un entorno de $[a,b]$ y $C[a,b]$, entonces $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$ uniformemente $\forall x \in [a,b]$

El fenómeno de Gibbs

El criterio de DINI2, asegura que si f tiene una discontinuidad de salto en a entonces su SF converge a la media de los límites laterales. Pero en las gráficas se observa un efecto curioso, y es que en las discontinuidades siempre se produce un overshoot de aproximadamente un 9% del tamaño del salto. Esto es problemática en las aplicaciones prácticas, por lo que se atenúa utilizando filtros.

> **Teorema 1:** Si $f \in C^1(\mathbb{T}\setminus\{a\})$, con discontinuidad de salto en $x = a$, entonces $\lim_{N\to\infty} S_N f\left(a \pm \frac{1}{2N+1}\right) = f\left(a^{\pm}\right) \pm 0,09 \left[f\left(a^+\right) - f\left(a^-\right) \right]$.

> **Ejercicio:** si $\{K_n\}_{n\ge 1}$ es una AI con núcleos positivos, entonces $-M_1 \le f(x) \le M_2 \implies -M_1 \le K_n * f(x) \le M_2$

En particular, los núcleos positivos no producen overshooting.

Sumabilidad de Cesàro y núcleo de Féjer

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente si $\exists \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Sea $\sum a_n$ una serie divergente, ¿es posible asignarle un valor natural con algún método de sumación?

La respuesta es que sí: se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge a s en media** o en el sentido de Cèsaro $(C,1)$ si $\sigma_N = \frac{S_0+S_1+\ldots+S_{N-1}}{N} \to s = C - \sum a_n$.

Lema 1: si $\sum_{n=0}^{\infty} s \implies C - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$

Por el criterio de Stolz, $\lim_N \sigma_N = \lim_N \frac{S_0+\ldots+S_N}{N+1} = \lim_N \frac{S_N}{1} = s$.

Notas: (1)$\sigma_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N-n}{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{n}{N}\right) a_n$

(2)Hay otros métodos de sumación: **Cèsaro K (C,k)**: $\sigma_N^{(k)} = \frac{\sigma_1^{(k-1)}+\ldots+\sigma_N^{(k-1)}}{N} \to C_k - \sum a_n$

Ricoz (R,α) :$R_\alpha - \sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{n}{N}\right)_+^{\alpha} a_n$

Abel: $A - \sum a_n = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n$

Núcleo de Féjer

Féjer aplicó la C-sumación a las SF. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ se define $\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x)+\ldots+S_{N-1}f(x)}{N}$. Como $S_n f = D_n * f$, se tiene $\sigma_N f = \left(\frac{D_0+\ldots+D_{N-1}}{N}\right) * f = F_N * f$.

Se define el ***N*-ésimo núcleo de Féjer**, $F_N(x)$ como $F_N(x) = \frac{D_0(x)+\ldots+D_{N-1}(x)}{N}$.

> **Lema:** (1) $F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$
> (2) $\{F_N(x)\}_{N\geq 1}$ es una AI en $L^1(\mathbb{T})$

(1) $z = e^{2\pi i x}$, entonces $F_N(x) = \frac{D_0+\ldots+D_{N-1}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{|k|\leq n} e^{2\pi i k x}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{|k|\leq n} z^k\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z^{n-1}-z^{-n}}{z-1} =$

$= \frac{1}{Z}\frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}\right) = \frac{1}{N(z-1)}\left(\frac{z^{N+1}-z}{z-1} - \frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1}\right) = \frac{z^{N+1}-z+z\left(z^{-N}-z\right)}{N(z-1)^2} = \frac{z\left(z^N-2+z^{-N}\right)}{N(z-1)^2} =$

$= \frac{1}{N}\frac{\left(z^{\frac{N}{2}}-z^{-\frac{N}{2}}\right)^2}{\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$

(2) - $\int_{\mathbb{T}} F_N = \int_{\mathbb{T}} |F_N| = \int_{\mathbb{T}} \frac{D_0+\ldots+D_{N-1}}{N} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} D_n}{N} = \frac{N}{N} = 1$

- $A = \sup_{N\geq 1}\int_{\mathbb{T}} |F_N(x)|\,dx$, $\int_{\mathbb{T}} |F_N(x)|\,dx = \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)\right| dx \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{\mathbb{T}} |D_n(x)|\,dx \leq \frac{N A_D}{N} = A_D$

- Si $\delta > 0$, usando $|\sin(\pi x)| \geq \sin\pi\delta$, es $\int_{\delta\leq|x|\leq\frac{1}{2}} |F_N(x)|\,dx \leq \int_{\delta\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \leq \frac{1}{N\sin^2(\pi\delta)} \overset{N\to\infty}{\to} 0$

Propiedades del núcleo de Féjer

(1) $F_N \geq 0$ y $F_N(x) = F_N(-x)$

(2) $\int_{\mathbb{T}} F_N(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} |F_N(x)|\,dx = 1$

(3) $F_N(0) = N$

(4) $F_N(x) = 0 \iff x = \pm\frac{j}{N}, j = 1,\ldots,\frac{N}{2}$

(5) decaimiento: $F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \lesssim \min\left\{N, \frac{1}{N|x|^2}\right\}$ ($\lesssim$ es $\leq$ por una cte)

(6) fourier: $\tilde{F_N}(n) = \left(1-\frac{|n|}{N}\right), n \in \mathbb{Z}$. De hecho, $\sigma_N f(x) = \sum_{|n|<N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)_+ \tilde{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$

$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|k|\leq n} e^{2\pi i k x}$. Dado un $-(N-1) \leq n \leq N-1$, el correspondiente $e^{2\pi i n x}$ aparece $N-|n|$ veces en la suma, acompañado por un $\frac{1}{N}$. Por tanto $\tilde{F_N}(n) = \frac{N-|n|}{N} = 1-\frac{|n|}{N}$

Propiedades sacadas de ejercicios:

$(H5E7)$ $\|F_N\|_{L^2}^2 \approx N$ y $\|D_N\|_{L^2}^2 = 2N+1$

> **Teorema de Féjer**
> (1) si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y existen $f(a^{\pm})$ entonces $\lim_N \sigma_N f(a) = \frac{f(a^-)+f(a^+)}{2}$
> (2) si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $\lim_N \sigma_N f(x) = f(x)$ uniformemente $\forall x \in \mathbb{T}$
> (3) si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\lim_N \|\sigma_N f - f\|_{L^1} = 0$

Corolario 1: unicidad de las SF: si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $\tilde{f}(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f \equiv 0$

$0 = \lim_N \|\sigma_N f - f\|_{L^1} = \lim_N \left\|\sum_{|n|<N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\tilde{f}(n)\, e^{2\pi i n x} - f\right\|_{L^1} = \lim_N \|0-f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \implies f \equiv 0$

Corolario 3: el conjunto $\mathcal{T} = span\left\{e^{2\pi i n x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en $C(\mathbb{T})$

si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $\sigma_N f(x) \in \mathcal{T}$ y converge unif a f

> **Corolario 4: el Teorema de Weierstrass**
> El conjunto $\mathcal{P} = span\,\{x^n\}_{n\geq 0}$ de los polinomios es denso en $C([a,b])$. O sea, si $f \in C([a,b])$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio $P(x)$ tal que $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

Podemos suponer $[a,b] = \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Sea $f \in C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ y sea $g(x) = f(|x|) \in C_{per}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$. Entonces $g \in C(\mathbb{T})$. Por el corolario 3, dado $\varepsilon > 0, \exists N_0 = N_0(\varepsilon,\delta)$ tal que $\sup_{|x|\leq\frac{1}{2}} \left|g(x) - \sum_{|n|\leq N_0} a_n e^{2\pi i n x}\right| < \varepsilon$.

Escribimos, por Taylor, $e^u = P_L(u) + R_L(u)$, con $|R_L(u)| \overset{L\to\infty}{\to} 0$ uniformemente en compactos, y en particular en $[-\pi N_0, \pi N_0]$.

Tomando $L_0 = L_0(\varepsilon, N_0, \{a_n\})$ tal que $|R_L(u)| < \frac{\varepsilon}{\sum_{|n|\leq N_0} a_n}, \forall L \geq L_0, \forall u \in [-\pi N_0, \pi N_0]$, entonces $\left|e^{2\pi i n x} - P_{L_0}(2\pi i n x)\right| = |R_{L_0}(2\pi i n x)| < \frac{\varepsilon}{\sum_{|n|\leq N_0} a_n}, \forall |x| \leq \frac{1}{2}, \forall |n| \leq N_0$.

Por tanto, $\left|g(x) - \sum_{|n|\leq N_0} a_n P_{L_0}(2\pi i n x)\right| \leq \left|g(x) - \sum_{|n|\leq N_0} a_n e^{2\pi i n x}\right| + \sum_{|n|\leq N_0} |a_n| \left|e^{2\pi i n x} - P_{L_0}(2\pi i n x)\right| < 2\varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{T}$

Ejercicio núcleos: se define la siguiente colección de núcleos $J_N(x) = a_N (N F_N(x))^2, N \geq 1$, donde la constante de normalización a_N es tal que $\int_{\mathbb{T}} J_N(x)\,dx = 1$. **(a)** $J_N(x)$ es un polinomio trigonométrico, determina su grado. Calcula los coeficientes de Fourier $\tilde{J_N}(0)$ y $\tilde{J_N}(2N)$.

D_N es pol.trig de grado $N \implies F_N$ pol.trig. de grado $N-1 \implies J_N$ pg de grado $2N-2$. $\tilde{J_N}(0) = \int_{\mathbb{T}} J_N(x) = 1$ y $\tilde{J_N}(2N) = 0$ porque $2N > 2N-2$.

(b) Demostrar que $a_N \sim \frac{1}{N^3}$ si $N \to \infty$ y determina si es posible su valor exacto.

$1 = \int_{\mathbb{T}} J_N = \int_{\mathbb{T}} a_N N^2 F_N^2 \overset{H5E7}{\approx} a_N N^2 N = a_N N^3 \implies a_N \sim \frac{1}{N^3}$.

De forma exacta: $\int_{\mathbb{T}} F_N^2 \overset{parseval}{=} \sum_{|n|\leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 \overset{desarrollando}{=} \frac{2n^2+1}{3N} \implies a_N = \frac{3}{2N^3+N}$.

(c) $\int_{\mathbb{T}} |x J_N(x)|\,dx \leq \frac{c}{N}$

$N \cdot F_N \lesssim \min\left\{N^2, \frac{1}{|x|^2}\right\} \implies J_N(x) = a_N (N F_N)^2 \lesssim \frac{1}{N^3} \min\left\{N^4, \frac{1}{|x|^4}\right\}$. Entonces

$\int_{\mathbb{T}} |x J_N| = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x J_N \lesssim \int_{0<x\leq\frac{1}{N}} x\frac{N^4}{N^3} + \int_{\frac{1}{N}<x\leq\frac{1}{2}} x \frac{1}{N^3}\frac{1}{x^4} = \left[N\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{N}} + \left[\frac{1}{N^3}\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2n} - \frac{8}{N^3} \leq \frac{5}{2N}$

(d) $f \in C(\mathbb{T})$ denotamos $w(\delta,f) = \sup_{|h|\leq\delta, x\in\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|$. Demuestra por inducción que $w(N\delta,f) \leq N w(\delta,f), N \geq 1$ y si $R > 0$ real entonces $w(R\delta,f) \leq (R+1)\,w(\delta,f)$.

Para $N = 1$ es obvio. Supongamos cierto para $N-1$. Entonces, para N es

$w(N\delta,f) \leq \sup_{|h|\leq N\delta, x\in\mathbb{T}} \left|f(x+h) - f\left(x+\frac{h}{N}\right)\right| + \overbrace{\left|f\left(x+\frac{h}{N} - f(x)\right)\right|}^{\leq w(\delta,f)} \overset{x+\frac{h}{N}=y}{\leq} \sup_{|h|\leq N\delta, x\in\mathbb{T}} \left|f\left(y + \overbrace{\frac{N-1}{N}h}^{\leq w((N-1)\delta,f)}\right) - f(y)\right| + w(\delta,f) \leq$
$\leq (N-1)\,w(\delta,f) + w(\delta,f) = N w(\delta,f)$.

$w(R\delta,f) \leq w((\lfloor R\rfloor + 1)\,\delta,f) \leq (\lfloor R\rfloor + 1)\,w(\delta,f) \leq (R+1)\,w(\delta,f)$.

(e) $|f * J_N(x) - f(x)| \leq (1 + \|N y J_N(y)\|_{L^1})\, w\left(\frac{1}{N},f\right)$:

$|f * J_N - f| = \left|\int f(x-y)\,J_N(y) - f(x)\int \overset{=1}{J_N(y)}\right| = \left|\int J_N\,[f(x-y) - f(x)]\right| \leq \int_{|y|\leq\frac{1}{N}} |f(x-y) - f(x)|\,J_N(y)\,dy +$

$+ \int_{\frac{1}{N}\leq|y|\frac{1}{2}} |f(x-y) - f(x)|\,J_N(y)\,dy \leq w\left(\frac{1}{N},f\right)\int_{|y|\leq\frac{1}{N}} J_N dy + \int_{\frac{1}{N}\leq|y|\leq\frac{1}{2}} w(|y|,f)\,J_N(y)\,dy \leq (*)$

Pero $w(|y|,f) = w\left(N\frac{|y|}{N},f\right) \leq (N|y|+1)\,w\left(\frac{1}{N},f\right)$. Por tanto

$(*) \leq w\left(\frac{1}{N},f\right)\left[\int_{|y|\leq\frac{1}{N}} J_N + \int_{\dots} N|y|\,J_N + \int_{\dots} J_N\right] = w\left(\frac{1}{N},f\right)\left[\int_{\mathbb{T}} J_N + \int_{\dots} N|y|\,J_N\right] =$

$= w(..)\left[1 + \int \dots\right] \leq w\left[1 + \int_{\mathbb{T}} ..\right] = w\left(\frac{1}{N},f\right)[1 + \|..\|]$

(f) Deduce que si $f \in Lip_1(\mathbb{T}) \implies \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x) - f * J_N(x)| \leq \frac{C_f}{N}$

$f \in Lip_1(\mathbb{T}) \implies |f(x+h) - f(x)| \leq M|h| \implies w\left(\frac{1}{N},f\right) \leq \frac{M}{N}$. Entonces

$|f(x) - f * J_N(x)| \leq (1 + \|N y J_N(y)\|_{L^1})\frac{M}{N} \leq (1 + N\|y J_N(y)\|_{L^1})\frac{M}{N} \overset{c}{\leq} \left(1 + \cancel{N}\frac{c}{\cancel{N}}\right)\frac{M}{N} = \frac{M(1+c)}{N}$

Aplicaciones de la teoría de SF

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^2$

De entre todas las curvas cerradas $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de longitud L, ¿cuál es la que encierra la mayor área?

Lema: Desigualdad de Wirtinger: sea f T-periódica y de clase C^1. (1) si $\int_0^T f = 0$ entonces $\|f\|_{L^2[0,T)} \leq \frac{T}{2\pi}\|f'\|_{L^2[0,T)}$, (2)si $f(0) = f(T)$ entonces $\|f\|_{L^2[0,T)} \leq \frac{T}{\pi}\|f'\|_{L^2[0,T)}$ y (3) para (1) se da la igualdad sii $f(y) = Ae^{-\frac{2\pi i y}{T}} + Be^{\frac{2\pi i y}{T}}$ y para (2) se da sii $f(y) = A\sin\left(\frac{\pi y}{T}\right)$.

> **Teorema:** sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple regular con $long(\Gamma) = L$. Entonces, el área que encierra cumple $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. Además, la igualdad se da si, y solo si, Γ es una circunferencia.

Tomamos la ppa $\sigma : [0, L] \to \Gamma, \sigma(s) = (x(s), y(s))$ y $|\sigma'(s)| = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\int_0^L x(s)\,ds = \int_0^L y(s)\,ds = 0$ porque las traslaciones no cambian L ni A.

$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^L (xdy - ydx)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^L (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\,ds\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^L Im\left[\overline{(x(s)+iy(s))}(x'(s)+iy'(s))\right]ds\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|Im\left[\int_0^L \overline{(x+iy)}(x'+iy')\,ds\right]\right| \overset{Im(z)\leq|z|}{\leq} \frac{1}{2}\left|\int_0^L \overline{\sigma(s)}\sigma'(s)\,ds\right| \overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \frac{1}{2}\left(\int_0^L |\sigma(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\sigma'(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\overset{Wirtinger}{\leq} \frac{L}{4\pi}\int_0^L |\sigma'(s)|^2\,ds = \frac{L^2}{4\pi}$.

Para la igualdad, recordemos que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ con $=$ si, y solo si, $u = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Así, si $A = \frac{L^2}{4\pi}$, donde hemos usado Cauchy-Schwarz debe ser una igualdad, por lo que debe ser $\sigma = \lambda\sigma' \implies x(s) + iy(s) = \lambda(x'(s) + iy'(s)),\ \forall s \in (0, L)$.

$x(s) + iy(s) \overset{igualdad\ Wirtinger}{=} ae^{\frac{2\pi is}{L}} + be^{-\frac{2\pi is}{L}}$

$\lambda(x'(s) + iy'(s)) = a\lambda\frac{2\pi i}{L}e^{\frac{2\pi is}{L}} - b\lambda\frac{2\pi i}{L}e^{-\frac{2\pi is}{L}}$

Entonces debe ser $\begin{cases} a = a\frac{2\pi i\lambda}{L} & \implies a = 0 \text{ ó } \lambda = \frac{L}{2\pi i} \\ b = -b\frac{2\pi i\lambda}{L} & \implies b = 0 \text{ ó } \lambda = -\frac{L}{2\pi i}\end{cases}$, supongamos $b = 0$, entonces $\lambda = \frac{L}{2\pi i}$ y es $\sigma(s) = ae^{\frac{2\pi is}{L}}$, que es una circunferencia de radio a.

> **Teorema: Weierstrass:** sea $\alpha \in (0, 1)$ y sea $W_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i2^n x}}{2^{n\alpha}},\ x \in \mathbb{T}$. Entonces, $W_\alpha \in C(\mathbb{T})$ pero no es derivable en ningún $x_0 \in \mathbb{R}$. Es más, $W_\alpha \in C^\alpha(\mathbb{T})$, pero $W_\alpha \notin C^{\alpha+\varepsilon}(x_0),\ \forall\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$

CAPÍTULO 6: MÁS SOBRE EDPs

EDOs de Sturm-Liouville

A menudo, al resolver EDP por separación de variables llegamos a EDOs de orden 2, del tipo

$\begin{cases} a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = -\lambda x(t) & t \in [a, b] \\ cond\ contorno \end{cases}$

En cada EDP, debemos determinar **(1)** ¿para qué valores de λ existen soluciones no nulas? **(2)** encontrar autofunciones $\phi_n | L\phi_n(t) = -\lambda_n\phi_n(t)$ **(3)** probar ortogonalidad de las ϕ_n **(4)** determinar si toda función $f(t)$ se puede escribir como $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(t), t \in [a, b]$

Y nos preguntamos si esto debe hacerse para cada EDP o puede generalizarse de alguna forma.

Un **operador de Sturm-Liouville regular** (L, cc) está formado por:

(a) un operador diferencial L de orden 2: $Lx(t) = -[a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t)], t \in [a, b]$ donde $a, b, c \in C_{\mathbb{R}}[a, b]$ con $a(t) > 0$.

(b) unas condiciones de contorno cc fijas, o bien $a_1x(a) + a_2x'(a) = 0$ y $b_1x(b) + b_2x(b) = 0$ (c_s) condiciones separadas o bien $x(a) = x(b)$ y $x'(a) = x'(b)$ (c_p) condiciones periódicas

Diremos que $\lambda \in \sigma(L, cc)$ (espectro) si $\exists\phi \not\equiv 0 | \begin{cases} L\phi(t) = \lambda\phi(t) \\ \phi \in cc \end{cases}$. En ese caso, λ es un autovalor de (L, cc) y $\phi(t)$ su autofunción asociada.

> **Teorema general de Sturm Liouville**
> Sea (L, cc) un operador de SL regular. Entonces se cumple:
> (1) $\sigma(L, cc) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ... \to \infty$
> (2)si $cc = c_p$ entonces todos los autovalores son simples, o sea $\dim\left\{\phi_n \in C^2_{\mathbb{R}}[a, b] | L\phi_n = \lambda_n\phi_n, \phi_n \in cc\right\} = 1$
> si $cc = c_p$ entonces $\dim\{\ker(L - \lambda I)\} < \infty,\ \forall n$
> (3) $\exists w(t) > 0$ un peso tal que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es BON en $L^2([a, b], w(t)\,dt)$. En particular, $\langle\phi_n, \phi_m\rangle_w = \int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)w(t)\,dt = 0, \forall n \neq m$
> y $w(t)$ es explícito, $w(t) = \frac{1}{a(t)}e^{\int_a^t \frac{b(s)}{a(s)}ds}$
> (4) toda $f \in C^2([a, b]) \cap cc$ se puede escribir como $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \phi_n\rangle_w \phi_n(t), t \in [a, b]$ con convergencia uniforme $\forall t \in [a, b]$

Nota: se cumplen algunas propiedades más que asemejan $\{\phi_n\}$ a un sistema trigonométrico.

(5)ϕ_n tiene exactamente $n - 1$ ceros en (a, b)

(6)**teorema de equiconvergencia:** si $f \in L^1[a, b]$, entonces $\widehat{S_N} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \phi_n\rangle_w \phi_n(t)$ cumple los mismos teoremas de convergencia que las SF usuales.

(7) **fórmula variacional de Rayleigh:** $\lambda_n = \min\left\{\langle L\phi, \phi\rangle_w | \phi \in C^2 \cap cc, \|\phi\|_{L^2_w} = 1, \phi \perp \{\phi_1, ..., \phi_{n-1}\}\right\}$ y esto permite aproximar λ_n numéricamente.

Nota: en algunos problemas aparecen **operadores SL singulares**, o sea, puede ocurrir que $a(t_0) = 0$ o bien $b(t), c(t) \to \infty$ en $t = t_0 \in [a, b]$, o también que $[a, b]$ no sea compacto, como $(-\infty, \infty)$.

Ecuación de la membrana vibrante

Tenemos una membrana horizontal tensa, situada en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y fija en la $\partial\Omega$ que solo sufre pequeñas vibraciones verticales con densidad ρ y tensión τ constantes $\left(c^2 = \frac{\tau}{\rho}\right)$.

Buscamos $u(t,x,y)$ la altura del punto $(x,y) \in \Omega$ en tiempo t. Entonces $\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) & t > 0, (x,y) \in \Omega \\ u(t,\cdot)_{|\partial\Omega} \equiv 0 \end{cases}$ sujeto a las condiciones iniciales $u(0,\cdot) = f,\ u_t(0,\cdot) = g$. Si la membrana es rectangular, entonces es $(x,y) \in R = [0,L_1] \times [0,L_2]$.

Buscamos soluciones $u(t,x,y) = T(t)V(x,y) \implies T''V = c^2 (TV_{xx} + TV_{yy}) = c^2 T\Delta V \implies \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} \equiv cte = \mu$

Por tanto quedan (1) $T'' = c^2\mu T$ y (2) $\begin{cases} \Delta V = \mu V \\ V_{|\partial R} \equiv 0 \end{cases}$ este último es el problema de autovalores del laplaciano. Empezamos por este problema, por SV: $V(x,y) = X(x)Y(y) \implies X''Y + XY'' = \mu XY \implies \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \mu \implies \frac{X''}{X} = \mu - \frac{Y''}{Y} \equiv cte = \sigma$.

Empezamos por X. caso $\sigma > 0 :$ $\begin{cases} X'' = \sigma X \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{cases} \implies X(x) = A\cosh(\sqrt{\sigma}x) + B\sinh(\sqrt{\sigma}x) \overset{cc}{\implies} A = B = 0\#$

caso $\sigma = 0 : X(x) = A + Bx \overset{cc}{\implies} A = B = 0\#$

caso $\sigma = -\lambda^2 < 0 :$ $\begin{cases} X'' = -\lambda^2 X \\ X(0) = X(L_1) = 0 \end{cases} \implies X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \overset{cc}{\implies} \begin{cases} A = 0 \\ B\sin(\lambda L_1) = 0 \end{cases} \implies \lambda = \frac{\pi n}{L_1}, n = 1,2,...$ y entonces $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)$.

Ahora Y, que es $\mu - \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \implies \begin{cases} Y'' = (\mu + \lambda^2)Y \\ Y(0) = Y(L_2) = 0 \end{cases}$. Los casos $\mu + \lambda^2 \geq 0 \implies Y \equiv 0\#$

caso $\mu + \lambda^2 = -\tau^2 < 0 \implies Y(y) = A\cos(\tau y) + B\sin(\tau y) \overset{cc}{\implies} A = (0), \tau = \frac{\pi m}{L_2} \implies Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), m = 1,2,...$

y uniendo ambas expresiones obtenemos el candidato a solución del problema de autovalores de Δ en R:

los autovalores son $\mu = -\rho_{n,m}^2 = -\lambda_n^2 - \tau_m^2,\ m,n = 1,2,...$ y las autofunciones son $V_{n,m}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$.

Por último, resolvemos T : tenemos $T'' = c^2\mu T = -c^2\rho_{n,m}^2 T \implies T(t) = A\cos(c\rho_{n,m}t) + B\sin(c\rho_{n,m}t)$ y la solución final es

$u(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m}\cos(c\rho_{n,m}t) + B_{n,m}\sin(c\rho_{n,m}t)]\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$.

Los coeficientes se calculan con las condiciones iniciales:

$t = 0 \implies f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$ (SF doble), y por ortogonalidad es

$A_{n,m} = \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L_2}\right)dydx.$

Y análogamente $g(x,y) = u_t(0,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c\rho_{n,m}B_{n,m}\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$ y es

$B_{n,m} = \frac{4}{c\rho_{n,m}L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} g(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)dydx.$

Nota: el coeficiente $c\rho_{n,m} = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2}$ se llama **frecuencia fundamental de vibración** (temporal) asociada a cada modo de vibración espacial $V_{n,m}$.

Funciones de Bessel

Para $\nu \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, la ecuación $z^2 f''(z) + zf'(z) + (z^2 - \nu^2)f(z) = 0,\ z \in (0,\infty)$ tiene como soluciones $f(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z)$ donde J_ν se denomina **función de Bessel de 1ª especie** y viene dada por

$J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(\nu+j)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}$

En particular, se tiene $J_0(0) = 1$ y $J_\nu(z) \approx z^\nu \to 0$ si $z \to 0$ (para $\nu > 0$). Además, $Y_\nu(z) \overset{z\to 0^+}{\to} \infty$ y esta se denomina función de Bessel de 2ª especie.

Solo usaremos $\nu \in \mathbb{N}$, pero las definiciones valen para todo $\nu \in \mathbb{R}$ tomando $(\nu + j)! = \Gamma(\nu + j + 1), \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du, \alpha > 0$.

Lema 1: relación entre $J_\nu, J_\nu', J_{\nu+1}$: $zJ_\nu'(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z)$

Lema 2: cálculo de $\|J_\nu(\lambda\cdot)\|_r^2$: $2\int_0^1 J_\nu(\lambda r)^2 rdr = \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)J_\nu(\lambda)^2 + J_\nu'(\lambda)^2$

Lema 3: fórmula de Sonine: $\int_0^1 (1 - r^2)^\mu J_\nu(\lambda r)r^{\nu+1}dr = \frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{\lambda^{\mu+1}}J_{\nu+\mu+1}(\lambda),\ \mu,\nu > -1$

$J_\nu(x)$ no tiene expresión explícita, salvo los casos especiales $\nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ y $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Pero para $x \to \infty$ se sabe:

Teorema 1: $J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ si $x \to \infty$

Corolario: $\mathcal{Z}_+(J_n) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...\}$ con $\lambda_m \to \infty$

Sea $G_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x} J_n(x) \overset{trm1}{=} \sin(x - \theta_n) + O\left(\frac{1}{x}\right)$ con $\theta_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Dado $\varepsilon > 0, \exists M_0 = M_0(n, \varepsilon) \mid \left|O\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \varepsilon,\ \forall x \geq M_0$. Entonces

$\sin(x - \theta_n) - \varepsilon \leq G_n(x) \leq \sin(x - \theta_n) + \varepsilon$, por lo que existe una raíz en cada intervalo $m\pi + \theta_n + (-2\varepsilon, 2\varepsilon), m \geq M_0$ y por tanto J_n tiene infinitos ceros y pueden ordenarse de forma creciente.

Nota: denotaremos $\mathcal{Z}_+(J_n) = \{s_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ y puede probarse que $s_{n,m} = \left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\frac{1}{m}\right)$ si $m \to \infty$.

Sistema de Fourier-Bessel

Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos el problema de SL singular $\begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) = -\lambda^2 R(r) & r \in (0,1) \\ R(1) = 0, \exists R(0^+) & CC \end{cases}$

Este tiene solución general $R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r)$ y por las CC es $B = 0$ y $\lambda \in \mathcal{Z}_+(J_n)$ con las autofunciones $\{\phi_m(r) = J(s_{n,m}r) : m = 1, 2, ...\}$.

Teorema 2: el sistema $\{\phi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ es una BOG de $L_r^2(0,1)$, es decir
$f(r) = L_r^2 - \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) J_n(s_{n,m}r)$, $a_m(f) = \frac{2\int_0^1 f(r) J_n(s_{n,m}r) r dr}{J_{n+1}^2(s_{n,m})}$
Además, si $f \in C^2[0,1]$ con $f(1) = 0$ (y $f(0) = 0$ si $n \neq 0$) entonces la convergencia es uniforme $\forall r \in [0,1]$

La membrana circular

$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & t > 0, (x,y) \in \mathbb{D} \\ u(t, \cdot) \equiv 0 & en\ \partial\mathbb{D} \\ u(0, \cdot) = f & u_t(0, \cdot) = g \end{cases}$ Buscamos soluciones $u(t,x,y) = T(t)V(x,y) \implies \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} \equiv cte = -\lambda^2$.

Pasamos V a polares $V(r\cos\theta, r\sin\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y entonces es $R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = -\lambda^2 R\Theta \implies \frac{r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \equiv cte = \mu^2$ (se descartan los < 0). Y obtenemos dos EDOs

$\begin{cases} \Theta'' = -\mu^2\Theta \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases} \implies \Theta(\theta) = A\cos(\mu\theta) + B\sin(\mu\theta) \overset{cp}{\implies} \mu = n \in \mathbb{Z} \overset{simetría}{\implies} \mu = n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$

$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \left(\lambda^2 r^2 - \mu^2\right)R = 0 & (\mu = n \in \mathbb{N}) \\ R(1) = 0,\ \exists R(0^+) \end{cases}$ que es una ecuación de Bessel, con solución general $R(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r)$ por las condiciones de contorno es $B = 0$ y $J_n(\lambda) = 0 \implies \lambda \in \mathcal{Z}_+(J_n) = \{s_{n,1} < s_{n,2} < ...\}$.

Por tanto, $\sigma\left(-\Delta, \mathbb{D}, V_{|\mathbb{D}} = 0\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{s_{n,m}^2\right\}_{m=1}^{\infty}$ (los autovalores del laplaciano en $\mathbb{D}$).

Así, si $\lambda = \lambda_{n,m} = s_{n,m}$ entonces $R_{n,m}(r) = J_n(\lambda_{n,m}r)$, $\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$ y es $V_{n,m} = R_{n,m}\Theta_n$, que son las autofunciones de Δ.

Además, $T_{n,m} = \alpha_{n,m}\cos(c\lambda_{n,m}t) + \beta_{n,m}\sin(c\lambda_{n,m}t)$.

Por simplicidad, resolvemos la velocidad inicial $u_r(0, \cdot) \equiv 0 \implies T'(0) = 0$ y obtenemos la solución general

$u\left(t, re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(c\lambda_{n,m}t) J_n(\lambda_{n,m}r)\left[A_{n,m}\cos(n\theta) + B_{n,m}\sin(n\theta)\right]$.

Caso radial

$u(t, \cdot) = f(r)$, entonces la solución solo tiene $n = 0$.

$u(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos(cs_mt) J_0(s_mr)$ con $\mathcal{Z}_+(J_0) = \{s_1 = 2,41 < s_2 = 5,52 < s_3 = 8,65 < ...\}$ (aproximadamente π-espaciadas)

Para $t = 0$ es $f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(s_mr) \implies a_m = \frac{\langle f, J_0(s_m\cdot)\rangle_r}{\|J_0(s_m\cdot)\|_r^2} = \frac{2}{J_1(s_m)^2}\int_0^1 f(r) J_0(s_mr) rdr$

Aspecto de las vibraciones fundamentales

$u_{0,m}(t,r) = \cos(cs_mt) J_0(s_mr)$ donde cs_m es la **frecuencia temporal** y es $cs_m \approx cm\pi + cte$, por lo que la vibración aumenta con m.

Caso general

$u(0, \cdot) = f\left(re^{i\theta}\right)$, entonces $u\left(t, re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(c\lambda_{n,m}t) J_n(\lambda_{n,m}r)\left[A_{n,m}\cos(n\theta) + B_{n,m}\sin(n\theta)\right]$.

Usando ortogonalidad, si $t = 0$, entonces $f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{n,m}r)\left[A_{n,m}\cos(n\theta) + B_{n,m}\sin(n\theta)\right]$ y entonces es

$A_{n,m} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_{n,m})}\int_0^1\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\cos(n\theta)\frac{d\theta}{\pi} J_n(\lambda_{n,m}r) rdr$

$B_{n,m} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_{n,m})}\int_0^1\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\sin(n\theta)\frac{d\theta}{\pi} J_n(\lambda_{n,m}r) rdr$

PD en cilindro

$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$ $\Omega = \mathbb{D} \times (0, L)$ supongamos $\varphi \equiv 0$ en la tapa inferior y el lateral y que $\varphi(r, \theta, L) = f(r, \theta)$ es la temperatura de la tapa superior.

Usamos coordenadas cilindricas $u(r,\theta,z)=u(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,,0<r<1,\theta\in(0,2\pi)\,,z\in(0,L)$. Queda $\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u+u_{zz}=0\\ u(r,\theta,0)=0 & u(1,\theta,z)=0\end{cases}$ y buscamos $u(r,\theta,z)=V(r,\theta)Z(z)$. Por tanto es $\left(V_{rr}+\frac{1}{r}V_r+\frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}\right)Z+VZ''=0$, de donde $\frac{Z''}{Z}=-\frac{V_{rr}+\frac{1}{r}V_r+\frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}}{V}\equiv cte=\mu$

Y obtenemos dos ecuaciones $\begin{cases}Z''=\mu Z\\ Z(0)=0\end{cases}$ y $\begin{cases}-\left(V_{rr}+\frac{1}{r}V_r+\frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}\right)=\mu V\\ V(1,\theta)\equiv 0\end{cases}$.

Empezamos por la segunda ecuación, que es $\begin{cases}-\Delta V=\mu V\\ V_{|\partial\mathbb{D}}\equiv 0\end{cases}$, que ya resolvimos y es $\mu=\lambda^2>0$ con $\lambda\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\{s_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ y si $\mu=s_{n,m}^2$ entonces $V_{n,m}(r,\theta)=J_n(s_{n,m}r)\left(A_{n,m}\cos(n\theta)+B_{n,m}\sin(n\theta)\right)$ (en el **caso radial** solo queda $n=0$).

Podemos también expresar, por simplicidad $V_{n,m}(r,\theta)=J_{|n|}(s_{n,m}r)\,e^{in\theta},n\in\mathbb{Z}$ con $\{s_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}=\mathcal{Z}\left(J_{|n|}\right)$.

Entonces, para la otra ecuación $\begin{cases}Z''=\mu Z=s_{n,m}^2Z\\ Z(0)=0\end{cases}$ es $Z_{n,m}(z)=\sinh(s_{n,m}z)$.

Así, la solución general es $u(r,\theta,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n,m}\cdot\sinh(s_{n,m}z)\,J_{|n|}(s_{n,m}r)\,e^{in\theta}$.

Y en $z=L$ es $f(r,\theta)=u(r,\theta,L)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 1}A_{n,m}\sinh(s_{n,m}L)\,J_{|n|}(s_{n,m}r)\,e^{in\theta}$ y usando la ortogonalidad en $L^2(rdrd\theta)$ es

$A_{n,m}=\frac{1}{\sinh(s_{n,m}L)}\frac{2}{J_{|n|+1}(s_{n,m})^2}\int_0^1\fint_0^{2\pi}f(r,\theta)\,J_{|n|}(s_{n,m}r)\,e^{-in\theta}d\theta rdr$.

Autovalores de $-\Delta$

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ acotado con $\partial\Omega$ regular, queremos determinar $\lambda\in\mathbb{C}$ tales que $\begin{cases}-\Delta u=\lambda u & en\ \Omega\\ (a_1u+a_2\nabla u\cdot\vec{n})_{|\partial\Omega}=0\end{cases}$ tenga una solución $u\in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)\setminus\{0\}$. O sea, $\lambda\in\sigma(-\Delta,\Omega,cc)$.

Típicamente se consideran las cc $u_{|\partial\Omega}=0$ o $\nabla u\cdot\vec{n}_{|\partial\Omega}=0$ o $(\nabla u\cdot\vec{n}+\gamma u)_{|\partial\Omega}=0,\gamma>0$.

Teorema general

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ acotado con $\partial\Omega\in C^{\infty}$. Consieramos $-\Delta u=\lambda u$ en Ω con cc estándar (Dirichlet, Neumann, Robin)

(1) Existen infinitos autovalores $\sigma(-\Delta,cc)=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se cumple $0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\nearrow\infty$. Además, $0\in\sigma(-\Delta,cc)\iff cc=c_n$

(2) Multiplicidad: $\dim E_\lambda=\dim\{\phi:-\Delta\phi=\lambda\phi\}<\infty,\ \forall\lambda\in\sigma(-\Delta,cc)$

(3) Ortogonalidad: $E_\lambda\perp E_\mu$ si $\lambda\neq\mu$

(4) $\exists\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ que forman BON de autovectores en $L^2(\Omega)$, o sea $f=L^2-\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n,\forall f\in L^2(\Omega)$. Además, si $f\in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)\cap cc$ la convergencia es uniforme en todo $x\in\Omega$

(5)Fórmula de Rayleigh (en el caso c_d):

$\lambda_n=\min\left\{\int_\Omega|\nabla\phi|^2:\phi\in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right),\|\phi\|=1,\phi_{|\partial\Omega}\equiv 0,\phi\perp\{\phi_1,...,\phi_{n-1}\}\right\}$

Dem de (3): $\int_\Omega(\Delta u)v-\int_\Omega u(\Delta v)\overset{Green2}{=}\int_{\partial\Omega}(\nabla u\cdot\vec{n})v-u(\nabla v\cdot\vec{n})\overset{u,v\in cc}{=}0$. Por tanto $\langle\Delta u,v\rangle=\langle u,\Delta v\rangle$ y es autoadjunto. Entonces, si $\varphi\in E_\lambda,\psi\in E_\mu$ con $\lambda\neq\mu$, se tiene $(\mu-\lambda)\langle\varphi,\psi\rangle=\langle\Delta\varphi,\psi\rangle-\langle\varphi,\Delta\psi\rangle=0$.

Dem de $\lambda\geq 0$: $\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle=\langle-\Delta\varphi,\varphi\rangle\overset{Green1}{=}-\int_{\partial\Omega}\nabla\varphi\cdot\vec{n}\varphi+\int_\Omega|\nabla\varphi|^2$. Ahora bien, $\int_{\partial\Omega}\nabla\varphi\cdot\vec{n}\varphi=\begin{cases}0 & c_d,c_n\\ \int_{\partial\Omega}\gamma u^2 & c_r\end{cases}=\delta(\varphi)$, por lo que es $\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle=\delta(\varphi)+\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\geq 0\implies\lambda\geq 0$.

Además, $\lambda=0\in\sigma(-\Delta)\iff\delta(\varphi)=0$ y $\int_\Omega|\nabla\varphi|^2=0\implies\varphi\equiv cte\begin{cases}c_d & \#\\ c_n & ok\\ c_r & \#\end{cases}$

Dem de (5) en el caso c_d y $n=1$: sea $\mathcal{A}=\left\{\varphi\in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)|\varphi_{|\partial\Omega}\equiv 0\right\}$.

Lema: suponer que existe $m=\min\left\{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2|\varphi\in\mathcal{A},\|\varphi\|_2=1\right\}$, entonces $m=\lambda_1$.

Paso1: veamos que $m\leq\lambda,\forall\lambda\in\sigma(-\Delta)$. Si $\lambda\in\sigma(-\Delta)$ entonces tomo su autofunción asociada $\varphi\in\mathcal{A}:-\Delta\varphi=\lambda\varphi$ y $\|\varphi\|=1$. Entonces $\lambda=\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle=\langle-\Delta\varphi,\varphi\rangle\overset{c_d+Green1}{=}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\overset{def}{\geq}m$.

Paso2: basta probar que $m\in\sigma(-\Delta)$. Usamos la hipótesis de que $\exists\varphi\in\mathcal{A}$ con $\|\varphi\|=1$ tal que $m=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2=E(\varphi)$. Sea $\phi\in C_c^{\infty}(\Omega)$ entonces $\varphi+t\phi\in\mathcal{A},\forall t\in\mathbb{R}$ y además $\exists\delta>0:\|\varphi+t\phi\|\neq 0,t\in(-\delta,\delta)$ por continuidad y $\|\varphi\|=1$. Tomamos $f(t)=\frac{\int_\Omega|\nabla(\varphi+t\phi)|^2}{\|\varphi+t\phi\|^2}=\frac{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2+t^2\int_\Omega|\nabla\phi|^2+2t\int_\Omega\nabla\varphi\nabla\phi}{\int|\varphi|^2+t^2\int|\phi|^2+2t\int\varphi\phi}\in\mathcal{D}(-\delta,\delta)$ y además f tiene un móinimo en $t=0$ con $f(0)=m$. Así,

$0=f'(0)=2\frac{\left(t\int|\nabla\phi|^2+\int\nabla\varphi\nabla\phi\right)\|\varphi+t\phi\|^2-\|\nabla(\varphi+t\phi)\|^2\left(t\int|\phi|^2+\int\varphi\phi\right)}{\|\varphi+t\phi\|^2}|_{t=0}=2\left(\int_\Omega\nabla\varphi\nabla\phi-\left(\overset{=m}{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2}\right)\left(\int_\Omega\varphi\phi\right)\right)=$

$\overset{Green1,\phi\in C_c^{\infty}(\Omega)}{=}2\left(\int_{\partial\Omega}\nabla\varphi\cdot\vec{n}\phi-\int_\Omega\Delta\varphi\phi-m\int_\Omega\varphi\phi\right)=-2\int_\Omega(\Delta\varphi+m\varphi)\phi=0$ y esto $\forall\phi\in C_c^{\infty}(\Omega)\implies\Delta\varphi+m\varphi=0\implies m\in\sigma(-\Delta)$.

Corolario 1: ec calor en dominio $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$: sea $f \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$. Entonces la EDP $\begin{cases} u_t = k\Delta u & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u(0,\cdot) = f & u(t,\cdot) \in cc \end{cases}$ tiene como solución clásica $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n t} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)\,,\ t > 0, x \in \Omega$.

Corolario 2: ec ondas en dominio $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$: sea $f, g \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$. Entonces la EDP $\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u(0,\cdot) = f, u_t(0,\cdot) = g & u(t,\cdot) \in cc \end{cases}$ tiene como solución clásica $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, \phi_n \rangle \cos\left(ct\sqrt{\lambda_n}\right) + \frac{\langle g, \phi_n \rangle}{c\sqrt{\lambda n}} \sin\left(ct\sqrt{\lambda_n}\right) \right) \phi_n(x)$.

Teorema de Weyl: si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entonces $\lambda_n \approx \frac{c_d n^{\frac{2}{d}}}{|\Omega|^{\frac{2}{d}}}$ si $n \to \infty$ con $c_d = \frac{(2\pi)^2}{|B_1(0)|^{\frac{2}{d}}}$

APÉNDICE

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)$, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ para $\alpha > 0$, y $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n natural.

$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$ para $p, q > 0$.

$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Teorema de Fubini

Sean $(X, M, \mu), (Y, N, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Son condición suficiente para $\int f d(\mu \times \nu) = \int [\int f(x,y) d\nu(y)] d\mu(x) = \int [\int f(x,y) d\mu(u)] d\nu(y)$:

- **Tonelli.** $f \in L^+(X \times Y)$, y además se tiene $\int f_x d\nu, \int f_y d\mu$ $L^+(X)$ y $L^+(Y)$ resp.
- **Fubini.** $f \in L^1(X \times Y)$, y además se tiene $\int f_x d\nu, \int f_y d\mu$ $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ resp.

Lema de derivación de integrales paramétricas: sea $F : (a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ medible tal que **(1)** si $y \in Y \implies t \in (a,b) \mapsto F(t,y)$ es derivable; y **(2)** $\exists h \in L^1(Y)$ tal que $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\right| \leq h(y)\,,\ \forall t \in (a,b)$. Entonces $\frac{d}{dt}\left[\int_Y F(t,y)\,dy\right] = \int_Y \frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\,dy,\ \forall t \in (a,b)$.

TCD: sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables, la cual converge puntualmente a una función medible f. Si existe una función g integrable, cumpliendo $|f_n| \leq g, \forall n$, entonces f es integrable con $\int f = \lim \int f_n$.

$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$