Análisis Funcional

Jose Antonio Lorencio Abril, Pablo Miralles González

21/22

Contents

Introducción

Apuntes para la asignatura Análisis Funcional, de 4º del grado en Matemáticas (5º en PCEO), en la UMU, para el curso 21/22. Asignatura impartida por el Catedrádico José Orihuela Calatayud.
Los resultados de teoría que pueden ser preguntados en el examen oral se mostrarán resaltados mediante un cuadro diferente al resto.

Part I

Espacios de Hilbert

1 Introducción: Espacios de Banach y espacios normados de dimensión finita.

Definition 1.1. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R},\mathbb{C}$ aunque usaremos $\mathbb{R}$ casi siempre) y $q : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que

1. q es **subaditiva** si $q\,(x+y) \leq q\,(x) + q\,(y)\,, \forall x, y \in X$
2. q es **positivamente homogénea** si $q\,(ax) = aq\,(x)\,, \forall x \in X, a > 0$
3. q es una **seminorma** si q es subaditiva y $q\,(ax) = |a|\,q\,(x)\,, \forall x \in X, a \in \mathbb{R}$
4. q es una **norma** si q es una seminorma y $q\,(x) = 0 \iff x = 0$

Definition 1.2. Un **espacio normado** es un espacio vectorial X con una norma $\|\cdot\|$.
Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama **espacio de Banach** si la distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ asociada a la norma mediante la fórmula

$$d\,(x, y) = \|x - y\|$$

es completa. Es decir, cada sucesión de Cauchy en (X, d) es convergente.

Dado $A \subset X$, denotamos *span* (A) al menor subespacio vectorial que contiene al conjunto A.
Se define la distancia de $x \in X$ a $S \subset X$ como $d\,(x, S) = \inf \{d\,(x, y) : y \in S\}$.

Proposition 1.3. *Sea X un espacio normado. Entonces*

1. *Las aplicaciones $s : X \times X \to X$ y $p : \mathbb{R} \times X \to X$ definidas, respectivamente, por las fórmulas*
$$s(x, y) = x + y \qquad p(a, x) = ax$$
son continuas.

2. *Las aplicaciones $s_y : X \to X$ y $p_a : X \to X$ con $a \neq 0$, definidos, respectivamente, por*
$$s_y(x) = x + y \qquad p_a(x) = ax$$
son homeomorfismos.

3. *Si G es un subconjunto abierto de X, también lo es $G + A$ cualquiera que sea el conjunto $A \subset X$.*

4. *Si F es un subconjunto cerrado y K es un subconjunto compacto, entonces $K + F$ es cerrado.*

5. *Si $Y \subset X$ es un subespacio vectorial también lo es su clausura topológica $\overline{Y}$.*

6. *Un subespacio $Y \subset X$ es un subespacio propio de X si, y solo si, el interior de Y es vacío.*

7. *El espacio normado X es completo si, y solo si, para cualquier sucesión $(y_n)_n$ en X tal que la serie real $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$ es convergente se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge a un punto de X.*

8. *Si $Y \subset X$ es un subespacio vectorial de X, entonces Y es un espacio normado para la norma inducida. Si X es de Banach, entonces Y es cerrado si, y solo si, Y es de Banach.*

Proof. TODO □

Proposition 1.4. *Sean X, Y espacios normados*

1. *Si $T : X \to Y$ es lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   (a) *T es continua en 0*
   (b) *La imagen por T de un conjunto acotado en X es un conjunto acotado en Y*
   (c) *sup* $\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} < \infty$
   (d) $\exists M \geq 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$
   (e) *T es uniformemente continua en X*
   (f) *T es continua*
2. *Si denotamos por $L(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, entonces $L(X, Y)$ es un espacio vectorial y la función definida para cada T de $L(X, Y)$ mediante*
$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}$$
es una norma en $L(X, Y)$. Además, si Y es un espacio de Banach, entonces también lo es $(L(X, Y), \|\cdot\|)$.
3. *La composición de aplicaciones lineales y continuas es lineal y continua.*

Proof. Demostremos primero 1.
$[e \implies f]$ Obvio.
$[f \implies a]$ Obvio.
$[a \implies f]$ Como T es continua en 0, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 | \|x\|_X < \delta \implies \|Tx\|_Y < \varepsilon$. Sea $x_0 \in X$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, si $\|x - x_0\|_X < \delta$ se tiene, por la continuidad en 0, que $\|T(x - x_0)\|_Y < \varepsilon \overset{T \text{ lineal}}{\iff} \|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$
$[a \implies e]$ Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad en 0 existe $\delta > 0$ de forma que si $\|x - y\|_X < 0$ entonces $\|T(x - y)\|_Y < \varepsilon \iff \|Tx - Ty\|_Y < \varepsilon$ y tenemos la continuidad uniforme, pues el δ que vale en el 0 vale para todo el espacio.
$[a \implies d]$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in X | \|x\|_X \leq \delta \implies \|Tx\|_Y \leq 1$. Ahora bien, dado $x \in X$, podemos tomar $x' = \delta \frac{x}{\|x\|_X}$ y entonces es $\|x'\|_X \leq \delta$ por lo que $\|Tx'\|_Y \leq 1 \iff 1 \geq \left\|T\left(\delta \frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \left\|\frac{\delta}{\|x\|_X} Tx\right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X}\|Tx\|_Y \iff \|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$ y entonces $M = \frac{1}{\delta}$ y tenemos el resultado.
$[d \implies b]$ $A \subset X$ acotado $\implies \|a\|_X < m, \forall a \in A \implies \|Ta\|_Y \leq M\|a\|_X \leq M \cdot m$ y TA es acotado.
$[b \implies c]$ Como $A = \{x | \|x\|_X = 1\}$ es acotado, entonces también lo es $\{Tx : \|x\|_X = 1\} = TA$.
$[c \implies a]$ Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists M > 0$ tal que $\left\|T \frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y < M \iff \|Tx\|_Y < M\|x\|_X$ y entonces si $\|x\|_X < \frac{\varepsilon}{M} \implies \|Tx\|_Y < \varepsilon$ y T es continua en 0.
Y ahora probamos 2.

- Es EV: obvio
- $\|T\|$ es norma:
  - $\|T + Q\| = \sup\{\|(T + Q)(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx + Qx\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| + \|Qx\| : \|x\| = 1$ $\sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|Qx\| : \|x\| = 1\} = \|T\| + \|Q\|$
  - Si $a > 0$, entonces $\|aT\| = \sup\{\|aTx\| : \|x\| = 1\} = a \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = a\|T\|$
  - Es seminorma: OK

- Es norma: $\|Tx\| = 0 \iff \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = 0 \iff \|Tx\| = 0, \forall x : \|x\| = 1 \iff Tx = 0, \forall x : \|x\| = 1 \iff T = 0$

- Si Y es Banach, entonces $L(X, Y)$ es Banach: sea $\{T_n\}_n$ de Cauchy, o sea, que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0 \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Para $x \in X$, sea $\{T_n x\}_n \subset Y$ una sucesión, que es también de Cauchy, porque

$$\varepsilon > \left\| T_n \frac{x}{\|x\|} - T_m \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| (T_n - T_m) \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|T_n x - T_m x\| \implies \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$$

teniendo en cuenta que x es fijo. Por tanto, como Y es de Banach, esta sucesión tiene límite y definimos $Tx = \lim_n T_n x, \forall x \in X$. Solo hay que ver que $T \in L(X, Y)$:

  - Lineal: $T(x + y) = \lim_n T_n(x + y) = \lim_n T_n x + T_n y = \lim T_n x + \lim T_n y = Tx + Ty$, y $T(ax) = \lim T_n(ax) = a \lim T_n x = aTx$
  - Continua: sea $A \subset X$ acotado. Entonces, si $x \in A$ es

$$\|Tx\| = \|\lim T_n x\| \overset{\|\cdot\|\ cont}{=} \lim \|T_n x\| \leq \lim M_n \overset{*}{<} \infty$$

    Y solo queda ver $*$. Podemos tomar los M_n como los supremos que nos dan la cota, o sea, las normas $\|T_n\|$. Entonces

$$|M_n - M_m| = |\|T_n\| - \|T_m\||$$

    y $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|T_n - T_m\| < \delta \implies |\|T_n\| - \|T_m\|| < \varepsilon$ por la continuidad de $\|\cdot\|$. Y por ser $\{T_n\}_n$ de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0, \|T_n - T_m\| < \delta$, por lo que $\{\|T_n\|\}_n$ es de Cauchy y por ser $\mathbb{R}$ completo, esta sucesión converge y existe $M = \lim M_n < \infty$.

Falta ver el último punto, 3. Es sencillo:

$$T(Q(x + y)) = T(Qx + Qy) = T(Qx) + T(Qy)$$

$$T(Q(ax)) = T(aQx) = aT(Qx)$$

y es lineal. Falta ver la continuidad:

$$\|TQx\| \overset{T\ cont}{\leq} M_T \|Qx\| \overset{Q\ cont}{\leq} M_T M_Q \|x\|$$

y entonces TQ es continua. □

Definition 1.5. Las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{R}$ se suelen llamar **formas lineales** y el conjunto de estas es el **dual algebraico**.
Si X es un espacio normado, el espacio de Banach $L(X, \mathbb{R})$, denotado por X^*, es el **dual topológico de X.**

Definition 1.6. Sean X, Y espacios normados.

1. Una aplicación $T : X \to Y$ es un **isomorfismo topológico de $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$** si es un isomorfismo algebraico tal que T y T^{-1} son continuas. Y en ese caso X e Y son **topológicamente isomorfos**.

2. Un isomorfismo topológico se dice **isométrico** si conserva la distancia:

$$\|T(x)\| = \|x\|, \ \forall x \in X$$

   Y en tal caso, X e Y son **isométricamente isomorfos.**

3. Si $\|\cdot\|, |\cdot|$ son normas en X, se dice que son equivalentes si la aplicación identidad

$$I : (X, \|\cdot\|) \to (X, |\cdot|)$$

   es un isomorfismo topológico de espacios normados.

Proposition 1.7. *Sean X e Y espacios normados.*

1. *Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal sobreyectiva. Entonces T es un isomorfismo topológico si, y solo si, existen cosntantes $m, M > 0$ tales que*

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$$

2. *Si $\|\cdot\|, |\cdot|$ son dos normas en X, entonces son equivalentes si, y solo si, existen $m, M > 0$ tales que*

$$m|x| \leq \|x\| \leq M|x|, \forall x \in X$$

3. *Si X e Y son espacios normados isomorfos, la completitud de uno equivale a la del otro.*

Proof. TODO □

Las aplicaciones lineales entre espacios normados se suelen llamar **operadores**, y se dicen **acotados** cuando son continuos, y **no acotados** en caso contrario.

Proposition 1.8. *Para cada espacio normado X existen un espacio de Banach $\hat{X}$ y una aplicación lineal isométrica $J : X \to \hat{X}$ tales que $J(X)$ es denso en $\hat{X}$.*
El espacio $\hat{X}$ se denomina ***compleción de $\boldsymbol{X}$***.

Proposition 1.9. *Sea X un espacio normado. Si Y es un subespacio vectorial cerrado del espacio normado X, entonces el espacio vectorial cociente X/Y es un espacio normado, para la norma cociente dada por*

$$|x + Y| = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$$

La aplicación cociente $Q : X \to X/Y$ es lineal, continua y abierta.
La norma cociente genera la topología cociente.
Si X es de Banach, X/Y es de Banach.

Definition 1.10. Sea X un espacio normado y sean Y,Z subespacios vectoriales tales que X es la suma algebraica de Y y Z:

$$X = Y \oplus Z$$

Se dice que **X es la suma directa topológica de Y y Z** si las proyecciones canónicas P_Y y P_Z de X en X:

$$P_Y(y+z) = y$$

$$P_Z(y+z) = z$$

son continuas.
En tal caso se dice que **Z es un complementario topológico de Y respecto de X**.

Corollary 1.11. *Si $X = Y \oplus Z$ y la suma es directa topológica, entonces Y y Z son cerrados.*

Proof. $Y = P_Z^{-1}(\{0\})$ preimagen continua de un cerrado, y es cerrado. Igual para $Z = P_Y^{-1}(\{0\})$. □

1.1 Espacios normados de dimensión finita

Vamos a ver como ejemplos de espacios de Banach los espacios euclídeos $\mathbb{K}^n$, que son de dimensión finita, y en los que la distancia entre dos puntos $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n$ está definida por

$$d(x,y) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

que no es más que la distancia asociada a la norma

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Veamos que es, efectivamente, una norma:

1. Para todo $x \in \mathbb{K}$:
$$\|x\|_2 \geq 0$$
$$\|x\|_2 = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \iff |x_i|^2 = 0, \forall i = 1, ..., n \iff x = 0$$
2. $\|ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |ax_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |a|^2 |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|a|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |a| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |a| \|x\|_2$
3. La desigualdad triangular es más costosa. Vamos ahora a desarrollar un resultado más general y que nos será útil más adelante.

Vamos a generalizar la norma definida a la siguiente

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para cualquier $p \geq 1$, y que es una norma. Las dos propiedades ya vistas se hacen de la misma forma y son evidentes. Vamos a ver la desigualdad triangular, para $p > 1$ (para $p = 1$ es la desigualdad triangular del valor absoluto).

Lemma 1.12. *Sean $a, b \geq 0$ y $p > 1$. Sea q el conjugado de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Proof. Por la convexidad de la exponencial tenemos

$$ab = e^{\log ab} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \overset{convexidad}{\leq} \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

Proposition 1.13. ***Desigualdad de Hölder***
Sean $a_k, b_k \geq 0$ con $1 \leq k \leq n$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $p > 1$ y q es el conjugado de p, entonces se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Proof. Sean $A = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y $B = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ y supongamos que son no nulos (si son nulos es obvio, pues obtenemos 0 a ambos lados). Aplicamos el lema anteriora $A_k = \frac{a_k}{A}$ y $B_k = \frac{b_k}{B}$, y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} = \sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} A_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} B_k^p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A^p} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq AB$$

□

Corollary 1.14. ***Desigualdad de Minkowski***
Sean $a_k, b_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq n$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $p \geq 1$ entonces se verifica

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. Para $p = 1$ tenemos una igualdad evidente. Supongamos entonces $p > 1$ y tomemos su conjugado q. Tenemos entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff q + p = qp \iff p = qp - q = q(p-1)$.
Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1} \overset{Hölder}{\leq}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(q-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Y entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Y ahora deducimos muy fácilmente la desigualdad triangular:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \overset{Minkowski}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Denotaremos a partir de ahora al espacio $\mathbb{K}^n$, con la norma $\|\cdot\|_p$, para $1 \leq p < \infty$ por ℓ_n^p.
Con ℓ_n^∞ denotamos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ donde

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

Un hecho relevante es que todas estas normas son equivalentes en $\mathbb{K}^n$, como consecuencia de las desigualdades

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

por lo que definen la mismo topología, que no es otra que la producto y como $\mathbb{K}$ es completo, lo es $\mathbb{K}^n$ con cualquiera de estas normas, y es $\left(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p\right)$ es de Banach. Este hecho es incluso más general, como establece el siguiente resultado:

Proposition 1.15. *Si X e Y son espacios normados finito dimensionales con la misma dimensión, entonces X e Y son topológicamente isomorfos.*
Si n es la dimensión común y $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ es una base algebraica de X, entonces el isomorfismo algebraico natural entre ℓ_n^1 y X, dado por

$$T(z) = T(a_1, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_i e_i$$

es, de hecho, un isomorfismo topológico.

Corollary 1.16. *Se verifica:*

1. Todas las normas en un espacio finito dimensinal son equivalentes
2. Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach
3. Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado
4. Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en un espacio normado arbitrario es continua
5. En espacios normados de dimensión finita los conjuntos cerrados y acotados son compactos

Lemma 1.17. ***Lema de Reisz sobre la existencia de elementos casi ortogonales***
Sean X un espacio normado e $Y \subset X$ un subespacio cerrado propio.
Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces existe $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $d(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Proof. Sea $x \in X \setminus Y$, y como Y es cerrado se tiene que $d = d(x, Y) > 0$.
Como $d < \frac{d}{1-\varepsilon}$ entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $d \leq \|x - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$ $(*)$.
Sea

$$x_\varepsilon = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$$

y para cada $y \in Y$ se tiene

$$\|x_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x - y_0\|} \|x - y_0 - \|x - y_0\| \, y\|$$

$$= \frac{1}{\|x - y_0\|} d(x, y_0 + \|x - y_0\| \, y) \geq \frac{d}{\|x - y_0\|} \overset{(*)}{>} 1 - \varepsilon$$

Por tanto, $d(x_\varepsilon, Y) = \inf\{\|x_\varepsilon - y\| : y \in Y\} \geq 1 - \varepsilon$. □

Corollary 1.18. *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces existen una sucesión de subespacios $(M_n)_n$ (que pueden tomarse finito dimensionales) y una sucesión de vectores $(y_n)_n$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$M_n \subset M_{n+1} \qquad y_n \in M_n \qquad \|y_n\| = 1 \qquad d(y_{n+1}, M_n) \geq \frac{1}{2}$$

Teorema de Riesz

Theorem 1.19. *Si X es un espacio normado las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es de dimensión finita*
2. *Todo conjunto cerrado y acotado de X es compacto*
3. *La bola unidad cerrada $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es compacta.*

Proof. [$i) \implies ii)$] Si X es de dimensión finita, entonces tiene una base $\{x_1, ..., x_n\}$ siendo n la dimensión de X. Así, podemos tomar el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to X \\ e_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

y la norma en $\mathbb{R}^n$ dada por $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \|Tx\|_X$.

- $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} \geq 0$ es obvio y $\|y\|_{\mathbb{R}^n} = 0 \iff \|Ty\|_X = 0 \overset{\|\cdot\|_X \text{ norma}}{\iff} Ty = 0 \overset{T \text{ lineal}}{\iff} y = 0$
- $\|y + z\|_{\mathbb{R}^n} = \|T(y + z)\|_X = \|Ty + Tz\|_X \leq \|Ty\|_X + \|Tz\|_X = \|y\|_{\mathbb{R}^n} + \|z\|_{\mathbb{R}^n}$
- $\|ay\|_{\mathbb{R}^n} = \|Tay\|_X = \|aTy\|_X = |a| \, \|Ty\|_X = |a| \, \|y\|_{\mathbb{R}^n}$

Y vemos como es una norma, que será equivalente a la usual (recordemos que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes).
De esta manera, es obvio que T es un homeomorfismo, ya que si A es un abierto en X, y tomamos $a \in A$, entonces $\exists r > 0 : B(a,r) \subset A$ y $\exists b \in \mathbb{R}^n$ con $Tb = a \implies b = T^{-1}a \in T^{-1}B_X(a,r) \subset T^{-1}A$. Dado $c \in T^{-1}B(a,r)$ se tiene $d(b,c) = \|c-b\|_{\mathbb{R}^n} = \|T(c-b)\|_X = \|Tc - Tb\|_X = d(Tc,a) < r$, y entonces $B_{\mathbb{R}^n}(b,r) \subset T^{-1}A$, por lo que la preimagen de A es abierta, y T es continua.
De igual forma se ve que T^{-1}es continua, teniendo en cuenta que, dado $x \in X$, podemos escribir $x = Ty$ con $y \in \mathbb{R}^n$, y entonces $\|x\|_X = \|Ty\|_X = \|y\|_{\mathbb{R}^n} = \left\|T^{-1}x\right\|_{\mathbb{R}^n}$.
Ahora, sea A un conjunto cerrado y acotado en X, entonces $T^{-1}A$ también es acotado por ser T^{-1} lineal continua, y además es cerrado por ser T un homeomorfismo. Entonces, $T^{-1}A$ es compacto por ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$. Y su imagen por T, es decir, A, es compacto, por ser imagen de un compacto por una aplicación continua.
Si queremos ver esta última afirmación, sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y $K \subset X$ compacto. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $f(K)$, entonces $\left\{f^{-1}(A_i)\right\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos de K, por lo que admite un subcubrimiento finito $\left\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_m)\right\}$, o sea, $K \subset f^{-1}(A_1) \cup ... \cup f^{-1}(A_m) = f^{-1}(A_1 \cup ... \cup A_m) \implies f(K) \subset A_1 \cup ... \cup A_m$ y obtenemos un subcubrimiento finito, por lo que $f(K)$ es compacto.
[$ii) \implies iii)$] Es obvio.
[$iii) \implies i)$] Supongamos que X es de dimensión infinita. Entonces podemos aplicar el corolario anterior. Así, si X es de dimensión infinita, existen estas sucesiones de subespacios y de vectores. En concreto, la sucesión $\{y_n\}_n$ no admite ninguna subsucesión convergente, ya que $\|y_n - y_m\| \geq \frac{1}{2}$ si $n \neq m$. Así, la bola unidad no es compacta secuencialmente, y por tanto no es compacta. Queda demostrado por contrarrecíproco.
[$iii) \implies i)$] (Otra forma, prueba de Choquet)
Como B_X es compacto, $\exists x_1, ..., x_n \in X$ tales que $B_X \subset \bigcup_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{2}B_X\right)$.
Sean $Y = span\{x_1, ..., x_n\}$ y $Q : X \to X/Y$ la aplicación cociente. Entonces

$$B_{X/Y} = Q(B_X) = \bigcup_{i=1}^n Q\left(x_i + \frac{1}{2}B_X\right) = \frac{1}{2}Q(B_X) = \frac{1}{2}B_{X/Y}$$

ya que $Q(x_i) = 0$, al ser $x_i \in Y$.
Así, procediendo de forma inductiva, se tiene

$$B_{X/Y} \subset \frac{1}{2}B_{X/Y} \subset \frac{1}{4}B_{X/Y} \subset ... \subset \frac{1}{2^n}B_{X/Y} \subset ...$$

Si $z \in B_{X/Y}$ entonces $z \in \frac{1}{2^n}B_{X/Y}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si $\|x\| \leq 1$ en X/Y, entonces $\|z\| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que $B_{X/Y} = \{0\}$ y entonces $X/Y = 0$. Por lo tanto, $X = Y$, y es de dimensión finita. □

Proposition 1.20. *Para un espacio normado X se verifican:*

1. *Si $Y \subset X$ es un subespacio vectorial cerrado y $Z \subset X$ es un subespacio vectorial finito dimensional, entonces $Y + Z$ es un espacio vectorial cerrado.*
2. *Si Y es un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal cuya imagen es un subespacio de dimensión finita, entonces T es continua si, y solo si, $KerT$ es cerrado.*

Corollary 1.21. *Sean X un espacio de Banach, e $Y \subset X$ un subespacio cerrado de codimensión finita* ($\dim X/Y < \infty$)*. Entonces cualquier complementario algebraico Z de Y es un complementario topológico.*

Proof. Queremos ver que si tomamos Z tal que $X = Y \oplus Z$, entonces las aplicaciones proyecciones canónicas son continuas. Como Y es de codimensión finita, entonces cualquier Z que complete X en suma directa con Y tiene dimensión finita, y aplicando el (2) de la proposición anterior, tenemos que la aplicación P_Z es continua, pues $KerP_Z = Y$, que es cerrado. Y, por otro lado, $P_Y = I - P_Z$, por lo que es suma de aplicaciones continuas, y es continua. $\square$

1.2 Algunos ejemplos de espacios de Banach

1. $\ell^p = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty$
2. $\ell^\infty = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty\right\}$
3. $c_0 = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_n |x_n| = 0\right\}$
4. $c = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_n x_n\right\}$
5. $c_{00} = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 | x_n = 0, \forall n > n_0\right\}$

2 Espacios de Hilbert. Ortogonalidad y ley del paralelogramo

Los espacios de Hilbert son un tipo especial de espacios de Banach, que aparecen como la generalización natural de los espacios euclídeos de dimensión finita. Estos espacios son aquellos espacios de Banach cuya norma procede de un producto escalar. En $\mathbb{R}^n$ conocemos el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

y se tiene

$$\|x\|_2 = +\sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Esto puede extenderse al espacio ℓ^2 real de dimensión infinita mediante

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

donde la convergencia absoluta se sigue de la desigualdad de Hölder, aplicada a las sumas parciales.
Es un hecho destacable que solo ℓ^2 de entre los espacios ℓ^p es de Hilbert (aunque todos son de Banach, como vimos).
Vamos a formalizar las ideas introducidas:

Definition 2.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un **producto escalar sobre H** es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

que verifica:

1. $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle, \forall z, y, z \in H$ y $a, b \in \mathbb{R}$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Se llama **espacio prehilbertiano** a un espacio vectorial H dotado de un producto escalar.
No obstante, no trabajaremos con estos espacios. Trabajaremos con los **espacios de Hilbert**, que son espacios prehilbertianos completos, o, dicho de otra forma, espacios de Banach en los que la norma se expresa como un producto escalar.
Las tres propiedades del producto escalar se expresan diciendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **forma bilineal simétrica definida positiva**.

Proposition 2.2. *Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano (o es de Hilbert) entonces*

1. *Se verifica la* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz***

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

y será una igualdad si, y solo si, x e y son linealmente dependientes. Esta propiedad, expresada en términos de la norma, queda

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

2. *La función*

$$\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$$

define una norma en H. Además, se verifica

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = ay, a > 0$$

Example 2.3. Espacios de Hilbert

1. $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. $\ell^2 = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$, con el producto escalar que adelantamos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

3. $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, donde μ es una medida positiva en el espacio medible (Ω, Σ), con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \overline{g} d\mu$$

donde $\overline{g}$ es el conjugado de g (si g es real se queda como está).

Proposition 2.4. *Sean H un espacio prehilbertiano y $\|\cdot\|$ la norma asociada. Entonces*

1. Se verifica la siguiente **ley del paralelogramo**
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \forall x, y \in H$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se verifica la siguiente **identidad de polarización real**
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \forall x, y \in H$$

3. (Esta nos da un poco igual) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se verifica la siguiente **identidad de polarización compleja**
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right)$$

Proof. Vamos a ver las dos primeras afirmaciones:

1.
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle =$$
$$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

2.
$$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\cancel{\langle x, x\rangle} + 2\langle x, y\rangle + \cancel{\langle y, y\rangle} - \cancel{\langle x, x\rangle} + 2\langle x, y\rangle - \cancel{\langle y, y\rangle}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(4\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle\right)$$

□

Theorem 2.5. ***Jordan-Von Neumann***
Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, son equivalentes:

1. *Existe un producto escalar en X tal que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2, \forall x \in X$*

2. *La norma $\|\cdot\|$ verifica la ley del paralelogramo*
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \forall x, y \in X$$

Definition 2.6. Sea H un espacio de Hilbert.

1. Los vectores $x, y \in H$ son **ortogonales,** $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$
2. El vector x se dice **ortogonal a un subconjunto $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{H}$**, $x \perp M$, si para todo $y \in M$ se cumple $\langle x, y\rangle = 0$.

   Se llama **ortogonal de $\boldsymbol{M}$** al conjunto

$$M^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M\}$$

3. Una familia $(x_i)_{i\in I}$ se dice **ortogonal** si $x_i \perp x_j$ para cada $i \neq j \in I$. Si, además, se cumple que $\|x_i\| = 1, \forall i \in I$, entonces la familia $(x_i)_{i\in I}$ se dice **ortonormal**.

Proposition 2.7. *Sea H un espacio de Hilbert.*

1. *Si $x, y \in H$ y $x \perp y$ netonces se verifica el* ***teorema de Pitágoras***

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2. *Si $(x_i)_i$ es una familia ortogonal y $x_i \neq 0$ para todo $i \in I$, entonces $(x_i)_i$ es un conjunto linealmente independiente.*
3. *Si $M \subset H$, entonces $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.*

Lemma 2.8. ***Gram-Schmidt***
Sea $(x_n)_n$ una colección contable de vectores linealmente independientes en el espacio prehilbertiano H. Si se define por inducción la sucesión $(u_n)_n$ mediante

$$y_1 = x_1, \qquad u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, u_j\rangle\, y_j, \qquad u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|},\ n \geq 2$$

entonces $(u_n)_n$ es una sucesión ortonormal en H y para cada n se tiene

$$span\,\{u_1, ..., u_n\} = span\,\{x_1, ..., x_n\}$$

Corollary 2.9. *Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio finito dimensional de H. Entonces:*

1. *M tiene una base algebraica formada por vectores ortonormales*

- *M es isomorfo, como espacio de Hilbert, a $\mathbb{K}^n$, con $n = \dim M$*

2.1 Mejor aproximación. Teorema de la proyección

Definition 2.10. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norma asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d la métrica asociada a $\|\cdot\|$ y S un subconjunto no vacío de H. Fijado $x \in H$, si la función $d(x, \cdot)$ alcanza un mínimo en S, o sea $\exists y \in S : d(x,y) = d(x,S)$, se dice que y es un **vector de mejor aproximación de x a S.**

Remark 2.11. No siempre existe un vector de mejor aproximación.

Recordemos que un **conjunto convexo** es un conjunto A tal que

$$\lambda A + (1-\lambda) A \subset A, \forall \lambda \in [0,1]$$

Theorem 2.12. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $C \subset H$ un subconjunto convexo y cerrado. Entonces, para cada $x \in H$, existe una única mejor aproximación de x a C.*

Proof. Podemos trasladar el espacio y suponer, sin pérdida de generalidad, que $x = 0$.
Sea $\alpha = \inf \{d(0,z) : z \in C\} = \inf \{\|z\| : z \in C\}$ y sea $(y_n)_n$ una sucesión de vectores en C con $\lim_n \|y_n\| = \alpha$.
Para concluir la prueba de la existencia, basta demostrar que $(y_n)_n$ es de Cauchy, ya que la completitud de H y el ser C cerrado nos garantiza que las sucesiones de Cauchy en C conergen a un punto de C, lo que nos dará un $y \in C$ límite de la sucesión, y por la continuidad de la norma tendremos

$$\|y\| = \left\|\lim_n y_n\right\| = \lim_n \|y_n\| = \alpha = d(0,C)$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, sea n_0 tal que $n \geq n_0 \implies \|y_n\|^2 < \alpha^2 + \varepsilon$. Por la ley del paralelogramo se tiene

$$\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2\right) - \left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

y nótese que $\frac{y_n + y_m}{2} \in C$ por convexidad, de forma que

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 = d\left(\frac{y_n + y_m}{2}, 0\right)^2 \geq \alpha^2$$

Por tanto, si $n, m > n_0$ se tiene

$$\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \varepsilon + \alpha^2 + \varepsilon\right) - \alpha^2 = \varepsilon$$

Para la unicidad, supongamos que existieran $y, z \in C$ con $\alpha = \|y\| = \|z\|$. Utilizando de nuevo la ley del paralelogramo y la convexidad de C obtenemos

$$\left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right) - \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \alpha^2\right) - \alpha^2 = 0 \implies y = z$$

$\square$

Theorem 2.13. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio prehilbertiano H. Son equivalentes:*

1. *Existe un vector y de mejor aproximación de x a Y*
2. *$x - y \perp Y$*

Además:

i. *Si el vector de mejor aproximación existe, entonces es único*

ii. *Si Y es de Hilbert, el vector de mejor aproximación siempre existe*

Proof. [$1 \implies 2$] Dados $z \in Y, a \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\|x-y\|^2 \overset{*}{\leq} \|x-y+az\|^2 = \langle x-y+az, x-y+az\rangle = \|x-y\|^2 + a^2\|z\|^2 + 2a\langle x-y, z\rangle$$

$*$ se debe a que como Y es un subespacio, $z \in Y \implies az \in Y \implies az - y \in Y$, y por tanto la distancia con x es mayor o igual que la distancia a y, que es un vector de mejor aproximación.
De donde

$$0 \leq a^2\|z\|^2 + 2a\langle x-y, z\rangle$$

Tomando $a = t\langle x-t, z\rangle, t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$0 \leq 2t\langle x-y, z\rangle^2 + t^2\langle x-y, z\rangle^2\|z\|^2$$

Así, si suponemos que existe $z \in Y$ tal que $\langle x-y, z\rangle \neq 0$, entonces se tendría

$$0 \leq 2t + t^2\|z\|^2, \forall t \in \mathbb{R}$$

lo cual es imposible. Por tanto, $\langle x-y, z\rangle = 0, \forall z \in Y$ y tenemos el resultado.
[$2 \implies 1$] Para cualquier $z \in Y$, se tiene

$$\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2 \overset{Pitágoras,\ x-y\perp Y}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

Por tanto, y es el vector de mejor aproximación de x a Y.
[$i.$] Supongamos que $y, z \in Y$ son ambos vectores de mejor aproximación. Entonces $x-y, x-z \in Y^\perp$, y también $x-y-(x-z) = z-y \in Y^\perp \implies z-y \in Y \cap Y^\perp \implies z-y=0 \implies z=y$.
[$ii.$] Los subespacios son convexos y es cerrado, el teorema anterior nos proporciona el resultado. ☐

Teorema de la proyección (enunciado alternativo)

Theorem 2.14. *Sea M un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H.*
Entonces, existen un único par de aplicaciones lineales y continuas P, Q tales que

$$P(H) = M \qquad Q(H) = M^\perp \qquad x = Px + Qx, \forall x \in H$$

Además

1. $x \in M \implies Px = x, Qx = 0$
   $x \in M^\perp \implies Px = 0, Qx = x$
2. $\|x - Px\| = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$
3. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2, \forall x \in H$

El operador P, que a cada $x \in H$ le hace corresponder la mejor aproximación de x a M, recibe el nombre de ***proyección ortogonal de H sobre M****.*

Proof. El vector $y = Px$ lo obtenemos por el teorema anterior, pues es el único vector que satisface $x - y \perp M$. Además, tomando $z = x - y \in M^{\perp}$, tenemos que $x = y + z$ y, dado que $M \cap M^{\perp} = 0$, entonces la suma $H = M + M^{\perp}$ es directa. Así, tenemos $M = P(H)$ y Q viene definida naturalmente por $Q = Id - P$, y es $Q(H) = M^{\perp}$, y como la suma es directa, la descomposición del espacio es única, y también lo es la descomposición $I = P + Q$, lo que nos da la unicidad del par de aplicaciones.
Veamos que P es lineal, para ello escribimos $x = y + z$ y $x' = y' + z'$, entonces

$$P\left(x + x'\right) = P\left(y + z + y' + z'\right) = P\left(\left(y + y'\right) + \left(z + z'\right)\right) = y + y' = Px + Px'$$

$$P(ax) = P(ay + az) = ay = aPx$$

y P es lineal, además lo es Q por ser suma de lineales.
Para ver la continuidad, tomamos N un subconjunto acotado de H, entonces, si $x \in N$

$$\|x\| = \|y + z\| \geq \|y\| = \|Px\|$$

y por tanto la imagen $P(N)$ es acotada y tenemos la continuidad por 1.4. Como antes, Q es continua por ser suma de continuas.
[1] Si $x \in M$ entonces $x = y + 0 \implies Px = y = x, Qx = x - y = y - y = 0$. La otra es análoga.
[2] Por cómo hemos definido P, es obvio.
[3] $\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 \overset{Pitágoras,\ Px \perp Qx}{=} \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ ☐

Corollary 2.15. *Si tenemos un subespacio cerrado propio $M \subsetneq H$, entonces $\exists x \in M^{\perp}, x \neq 0$*

Proof. $H = M \oplus M^{\perp}$ y supongamos que $M^{\perp} = 0$, entonces si $x \in H$ se tiene por el teorema de la Proyección que $x = y + z$ con $y \in M, z \in M^{\perp} \implies z = 0 \implies x = y \implies x \in M \implies M = H\#$ Contradicción, pues M es propio. ☐

Proposition 2.16. *Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ ortonormal en H, entonces*

$$\left\|\sum c_i u_i\right\|^2 = \sum c_i^2$$

Proof. Esto se puede probar de varias formas, una es aplicar el teorema de Pitágoras $n - 1$ veces. Otra es la siguiente cuenta

$$\left\langle \sum c_i u_i, \sum c_i u_i \right\rangle = \sum_{i,j} c_i c_j \langle u_i, u_j \rangle \overset{*}{=} \sum c_i^2$$

donde $*$ se debe a que $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. ☐

Corollary 2.17. *Todo conjunto ortonormal está formado por vectores linealmente independientes.*

Proof.

$$0 = \sum a_i u_i \iff 0 = \left\|\sum a_i u_i\right\| \overset{prop\ anterior}{=} \sum a_i^2 \implies a_i = 0, \forall i$$

☐

Proposition 2.18. *Sea* $\{u_1, ..., u_n\}$ *ortonormal en* H*,* $M = span\{u_1, ..., u_n\}$*. Entonces*

$$P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$

Y si $d = d(x, M)$*, entonces*

$$\|x\|^2 - d^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$$

Proof. Dado x,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \in M \implies x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \in M^{\perp}$$

pues

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle x, u_j \rangle - \left\langle \sum \langle x, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle x, u_j \rangle - \langle x, u_j \rangle \|u_j\|^2 = 0$$

Entonces, por la unicidad del teorema de la proyección, es

$$P_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$$

y para la última afirmación, nótese que

$$d = d(x, M) = \|x - P_M x\|$$

por lo que es

$$\|x\|^2 = \|x - P_M x + P_M x\|^2 \overset{Pitágoras}{=} \|x - P_M x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \right\|^2 \overset{2.16}{=} d^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2$$

□

Corollary 2.19. ***Desigualdad de Bessel***
Si $\{u_1, ..., u_n, ...\}$ *son ortonormales en* H*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Teorema de Riesz-Frechet

Theorem 2.20. *Sean un espacio de Hilbert* H *y una forma lineal* $f : H \to \mathbb{R}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f es continua
2. Existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$, siendo además $\|f\| = \|y\|$

Proof. [$\Longleftarrow$] Trivial, el producto escalar es bicontinuo.
[$\Longrightarrow$] Tomamos $M = \ker f$ que es un subespacio lineal cerrado, por ser preimagen por una aplicación lineal continua de $\{0\}$, en H.
Si $f = 0$, basta tomar $y = 0$.
Por tanto, supongamos $f \neq 0$, y $M \subsetneq H$, de forma que existe 2.15 $z \in M^{\perp}$ con $\|z\| = 1$ (basta normalizarlo).
Para $x \in H$, hacemos

$$u = f(x)\,z - f(z)\,x \implies f(u) = 0 \implies u \in M \implies \langle u, z\rangle = 0$$

$$\implies \langle f(x)\,z - f(z)\,x, z\rangle = 0 \implies f(x)\,\|z\|^2 - f(z)\,\langle x, z\rangle = f(x) - f(z)\,\langle x, z\rangle = 0 \implies f(x) = \langle x, f(z)\,z\rangle$$

luego $y = f(z)\,z$ y tenemos el resultado. □

3 Bases en espacios de Hilbert

Vamos a ver el concepto de base Hilbertiana, muy útil para trabajar en espacios de Hilbert, y que en espacios de dimensión infinita no coincide con el concepto de base algebraica.

Proposition 3.1. *Sea H un espacio prehilbertiano y $(e_i)_{i\in I}$ un conjunto ortonormal en H. Sea $\Lambda : H \to \mathbb{K}^I$ definida por $\Lambda(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$.*

1. *La aplicación Λ tiene rango en $\ell^2(I)$, es lineal y continua de norma 1.*
2. *Si además H es un espacio de Hilbert, la aplicación anterior es sobreyectiva sobre $\ell^2(I)$* ***(Teorema de Riesz-Fischer)***

Proof. Veamos cada afirmación:

1. Recordemos que $\ell^2(I) = \left\{(x_i)_{i\in I} : \sum_{i\in I} x_i^2 < \infty\right\}$, entonces dado $x \in H$ y $\Lambda(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$, queremos ver que su suma cuadrática converge:

$$\sum_{i\in I} (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}^2 \overset{Bessel(2.19)}{\leq} \|x\| < \infty$$

y lo tenemos. Para la linealidad

$$\Lambda(x+y) = (\langle x+y, e_i\rangle)_{i\in I} = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} + (\langle y, e_i\rangle)_{i\in I} = \Lambda x + \Lambda y$$

$$\Lambda(ax) = (\langle ax, e_i\rangle)_{i\in I} = a\,(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} = a\Lambda x$$

Y para la norma

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\|_2 : \|x\| = 1\}$$

ya hemos visto que $\|\Lambda\| \leq \|x\| = 1$, y tomando $x = e_1$, entonces

$$\|\Lambda e_1\| = \sum_{i\in I} \langle e_1, e_i\rangle^2 \overset{(e_i)_1 \ ortonormal}{=} \|e_1\|^2 = 1$$

y tenemos el resultado.

2. Dado $(y_n)_n \in \ell^2$, ¿$\exists x \in H : \Lambda x = (y_n)_n$?

   Sea $x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, si existe el límite de esta serie, $x = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i$, entonces, por la continuidad de Λ (es lineal y con norma finita) se tendría $\Lambda x = (y_n)_n$. Por tanto, falta ver que $x = \lim_n x_n$.

   Ahora bien, como H es de Hilbert, basta ver que $(x_n)_n$ es de Cauchy. Esto sucede si, y solo si, $\|x_n - x_m\| \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$, lo que es equivalente a que $\|x_n - x_m\|^2 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$. Ahora bien

$$\|x_n - x_m\|^2 = \langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle \overset{m\geq n}{=} \sum_{j=n+1}^{m} |y_j|^2$$

   Y como $(y_n)_n \in \ell^2 \implies \sum |y_n|^2$ es una serie convergente, por lo que los restos tienden a 0, es decir, que se verifica $\sum_{j=n+1}^{m} |y_j|^2 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$, y entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy, tal y como necesitábamos ver.

□

Definition 3.2. Un conjunto ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert H se dice **maximal en H** si no está contenido propiamente en ningún otro conjunto ortonormal.
Un conjunto S de un espacio $(E, \|\cdot\|)$ se dice **total** si $\overline{spanS} = E$.
Un subespacio es un **hiperplano** si es maximal entre los subespacios propios.

Proposition 3.3. *Sea H un espacio de Hilbert. $S \subset H$ es total si, y solo si, $S^\perp = 0$*

Proof. [$\implies$] Supongamos que $\overline{spanS} = H$ y sea $x \in H$ tal que $\langle s, x\rangle = 0, \forall s \in S$. Entonces, por la linealidad y continuidad del producto escalar $\langle y, x\rangle = 0, \forall y \in H$. En particular $\langle x, x\rangle = 0$ y, por tanto, $S^\perp = 0$.
[$\impliedby$] $H = \overline{spanS} \oplus \overline{spanS}^\perp$, por el teorema de la proyección (2.1), pero $\overline{spanS}^\perp = \overline{spanS^\perp}$ y $S^\perp = 0$, luego $H = \overline{spanS}$. □

Teorema de la base hilbertiana

Theorem 3.4. *Sean H un espacio de Hilbert y $(e_i)_{i\in I}$ un conjunto ortonormal en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(e_i)_{i\in I}$ es un conjunto ortonormal maximal*
2. *si $x \in H$ es tal que $\langle x, e_i\rangle = 0, \forall i \in I$, entonces $x = 0$*
3. *$(e_i)_{i\in I}$ es un conjunto total*
4. *La aplicación $\Lambda : H \to \ell^2(I)$ definida por $\Lambda x = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ es inyectiva*
5. ***Desarrollo de Fourier:** Para cada $x \in H$ se verifica $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$*
6. *Para cada $x, y \in H$ se tiene $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle$*
7. ***Identidad de Parseval:** para cada $x \in H$ se tiene $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle^2$*

Proof. [1. $\implies$ 2.] Supongamos que hay $x \in H$ tal que $\langle x, e_i\rangle = 0, \forall i \in I$, pero $x \neq 0$. Entonces $\frac{x}{\|x\|} \perp (e_i)_{i\in I}$ y $\frac{x}{\|x\|} \neq 0$, por lo que $\left\{\frac{x}{\|x\|}, (e_i)_{i\in I}\right\}$ es un conjunto ortonormal que contiene al original, y por tanto este no es maximal. Queda demostrado por contrarrecíproco.

[2. $\implies$ 3.] Si $x \in (e_i)_i^\perp$ entonces $\langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in I$ y entonces por la hipótesis $x = 0$. Por tanto, $(e_i)_i^\perp = 0$, y por la proposición anterior se tiene que $(e_i)_i$ es total.
[3. $\implies$ 2.] Obvio, por el teorema anterior, ya que el ortogonal es el subespacio nulo.
[2. $\iff$ 4.] Λx es inyectiva si, y solo si, $\ker \Lambda = 0 \iff [\Lambda x = 0 \iff x = 0]$
[2. $\implies$ 5.] Dado $x \in H$, sea $y = x - \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$. Entonces

$$\langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \|e_i\|^2 = 0 \implies y = 0 \implies x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

[5. $\implies$ 6.] Dados $x, y \in H$ entonces

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_i \langle y, e_i \rangle e_i \right\rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \|e_i\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

[6. $\implies$ 7.] $\langle x, x \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$
[7. $\implies$ 1.] Supongamos que $M \subset H$ es un conjunto ortonormal conteniendo a $(e_i)_i$. Si $x \in M \setminus (e_i)_i$, entonces

$$1 = \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2 = 0$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $M \setminus (e_i)_i$ es vacío y $(e_i)_i$ es maximal. $\square$

Definition 3.5. Sea H un espacio de Hilbert. Un conjunto ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ verificando cualquiera de las condiciones anteriores (en consecuencia todas) se llama **base hilbertiana de H** o sistema ortonormal completo.
Se llama **dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert H** al cardinal de cualquier base hilbertiana de H.

Proposition 3.6. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Son equivalentes:*

1. *La dimensión hilbertiana de H es $\aleph_0$*
2. *H es isomorfo a ℓ^2*
3. *H es separable*

3.1 Introducción a la topología débil

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces, la topología generada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la que establece el siguiente criterio de convergencia:

$$x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x \iff \langle \cdot, x_n \rangle \overset{n\to\infty}{\to}_{unif} \langle \cdot, x \rangle$$

El problema es que la bola unidad no es compacta en esta topología, lo que complica la búsqueda de óptimos de los funcionales de H en $\mathbb{R}$. Para acotar este problema se puede utilizar la topología débil, en la que la bola unidad resulta compacta:

$$x_n \overset{débilmente}{\to} x \iff \langle \cdot, x_n \rangle \overset{n\to\infty}{\to}_{punt} \langle \cdot, x \rangle$$

Y se tiene que $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ es compacto $\iff H \cong \mathbb{R}^N$.

Definition 3.7. Una función $f : B_H \to [a, b]$ es **débilmente inferiormente semicontinua** si, dada una sucesión $(x_n)_n \subset B_H$ y una subsucesión convergente suya en la topología débil, se verifica

$$f\left(\lim_k x_{n_k}\right) \leq \lim_k f\left(x_{n_k}\right)$$

y la sucesión es una **sucesión minimizante**.
Un ejemplo es la norma.

Theorem 3.8. *Si H es un espacio de Hilbert separable, entonces B_H es débilmente compacto.*

Proof.

$$\begin{array}{ccccc} H & \overset{inyectiva}{\to} & \mathbb{R}^{B_H} & & \\ x & \mapsto & \langle \cdot, x\rangle : B_H & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \langle y, x\rangle \end{array}$$

Como $\forall z, x \in B_H$ es $|\langle z, x\rangle| \leq \|z\| \|x\| \leq 1$, entonces hay una aplicación $B_H \overset{inyectiva}{\to} [-1, 1]^{B_H}$ y $[-1, 1]^{B_H}$ es compacto, por ser producto de compactos (Teorema de Tychonoff) y ser H separable, y se puede extraer una base numerable.
TODO teorema de Ascoli ☐

4 Aproximación por polinomios en espacios de funciones

Teorema de Korovkin

Theorem 4.1. *Sean las funciones $f_0, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, dadas por*

$$f_0(t) = 1 \qquad f_1(t) = t \qquad f_2(t) = t^2$$

Para $n = 1, 2, ...$ sea $P_n : C([a, b]) \to C([a, b])$ lineal. Supongamos que:

1. *$P_n(f) \geq 0, \forall n, \forall f \geq 0$ (es positiva)*
2. *Para $m = 0, 1, 2$ se tiene $\lim_n \|P_n(f_m) - f_m\|_\infty = 0$*

Entonces

$$\lim_n \|P_n(f) - f\|_\infty = 0$$

para cada $f \in C([a, b])$.

Proof. Sea $f \in C([a, b])$ y sea $\alpha > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq \alpha$. Para $t, s \in [a, b]$ se tiene

$$-2\alpha \leq f(t) - f(s) \leq 2\alpha \tag{1}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[a, b]$ (continua en un compacto), entonces $\exists\delta > 0$ tal que para $t, s \in [a, b]$ con $|t - s| < \delta$ se tiene

$$-\varepsilon \leq f(t) - f(s) \leq \varepsilon \tag{2}$$

Fijado $s \in [a, b]$, sea $g_s(t) = (t - s)^2$. Si $t, s \in [a, b]$ y $|t - s| \geq \delta$ entonces $g_s(t) \geq \delta^2$. Entonces, combinando (1) y (2) y usando $\frac{g_s(t)}{\delta^2} \geq 1, \forall |t - s| \geq \delta$, tenemos

$$-\varepsilon - 2\alpha\frac{g_s(t)}{\delta^2} \leq f(t) - f(s) \leq \varepsilon + 2\alpha\frac{g_s(t)}{\delta^2} \tag{3}$$

Como cada P_n es lineal y positivo, se tiene

$$-\varepsilon P_n(f_0) - 2\alpha \frac{P_n(g_s)}{\delta^2} \leq P_n(f) - f(s) P_n(f_0) \leq \varepsilon P_n(f_0) + 2\alpha \frac{P_n(g_s)}{\delta^2} \tag{4}$$

Por hipótesis, $P_n(f_0)(s) \rightarrow_{unif} 1$ en $s \in [a,b]$. Por otro lado, $P_n(g_s)(s) \rightarrow_{unif} 0$ en $s \in [a,b]$, porque $g_s = f_2 - 2sf_1 + s^2 f_0$ y entonces

$$\lim_n P_n(g_s)(s) = \lim_n \left(P_n(f_2)(s) - 2sP_n(f_1) + s^2 P_n(f_0)\right) = s^2 - 2ss + s^2 \cdot 1 = 0$$

Entonces (4) queda

$$-\varepsilon \leq \lim_n P_n(f) - f(s) \leq \varepsilon \tag{5}$$

y entonces podemos concluir que $P_n(f)(s) \rightarrow_{unif} f(s)$ en $s \in [a,b]$. □

Teorema de Weierstrass

Theorem 4.2. *El conjunto de los polinomios en una variable es denso en* $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Proof. TODO □

Example 4.3. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar en $C([a,b])$, entonces

$$Pols \overset{Weierstrass(4)}{\hookrightarrow} (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ más grueso que } \|\cdot\|}{\hookrightarrow} (C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle) \overset{denso(completación)}{\hookrightarrow} \left(\mathbb{L}^2([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$$

Entonces el producto será de la forma

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, w(t)\, dt$$

donde $w(t)$ es un peso.
Los polinomios son generados por el conjunto $\{1, t, t^2, ...\}$ y al aplocar Gram-Schmidt con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a esta base obtenemos una base de polinomios ortogonales de forma que

$$span\{1, t, t^2, ...\} = \mathbb{L}^2([a,b])$$

Theorem 4.4. *Dado un producto escalar* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *en* $C[a,b]$, *existe una sucesión de polinomios* $\{\varphi_n\}_n$ *con* $gr\varphi_n = n$ *para* $n = 0, 1, 2, ...$ *con*

$$\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

$$span\{\varphi_0, \varphi_1, ...\} = polinomios\ \ [a,b]$$

El coeficiente principal de cada polinomio puede tomarse positivo, y si se hace así, la sucesión está unívocamente determinada.

Theorem 4.5. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en $C[a,b]$ tal que $\|\cdot\|_\infty$ es más fina que $\|\cdot\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle}$, la sucesión de polinomios ortogonales $\{\varphi_n\}_n$ es una base hilbertiana en*

$$\mathbb{L}^2([a,b], \langle \cdot, \cdot \rangle) = \overline{\left(C[a,b], \|\cdot\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle}\right)}^{completado}$$

Es decir, dado $f \in C[a,b]$ se puede escribir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

4.1 Series de Fourier en $[-\pi, \pi]$

Con el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt$, el conjunto $\{u_n\}_n$ con

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad u_{2m-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\pi t) \qquad u_{2m}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\pi t)$$

es ortonormal.

Teorema de Weierstrass para funciones periódicas

Theorem 4.6. *Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(-\pi) = f(\pi)$ y tomamos $\varepsilon > 0$, entonces existe P_ε un polinomio trigonométrico tal que $\|f - P_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Se tiene que

$$\overline{span\{u_0, u_1, ...\}}^{\|\cdot\|_{\langle \cdot,\cdot \rangle}} = \mathbb{L}^2[-\pi, \pi]$$

5 Convolución y aproximación de funciones

Definition 5.1. Para funciones f, g localmente inegrables en $\mathbb{R}^n$, definimos el **producto de convolución**:

$$(f * g)(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(a - x) \, dx$$

para cada $a \in \mathbb{R}^n$ para el que la función $x \mapsto f(x) g(a - x)$ sea integrable.

Para funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz asegura que su producto de convolución está definido para todo $a \in \mathbb{R}^n$, de hecho tenemos

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

siendo $f * g$ continua por el teorema de la convergencia dominada, así como uniformemente acotada. Nótese que el producto de convolución es conmutativo (se prueba haciendo el cambio $a - x = t$.

Definition 5.2. Una sucesión de funciones $\{K_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : m = 1, 2, ...\}$ es una **sucesión de Dirac** o **sucesión regularizante** si verifica las siguientes condiciones:

1. $K_m(x) \geq 0, \forall x, \forall m$
2. K_n es continua $\forall n$ con $\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x)\, dx = 1$
3. Dados $\varepsilon > 0, \delta > 0, \exists M | m \geq M \implies \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} K_m(x)\, dx < \varepsilon$

Theorem 5.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, definamos*

$$f_m(x) = f * K_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, K_m(x-t)\, dt$$

donde $\{K_m\}_m$ es una sucesión de Dirac.
Entonces la sucesión $\{f_m\}_m$ tiende hacia f uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos el siguiente operador diferencial

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Definimos, además, el espacio de las funciones diferenciables con soporte compacto

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^\infty, sop(\varphi) \ \ compacto\}$$

que es denso en $L^2(\mathbb{R})$ para la norma

$$\|x\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |x(w)|^2\, dw$$

Por último, definimos el operador adjunto del operador anterior

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} \overline{a_\alpha} (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

Lemma 5.4. ***Lema de Gauss***
Sea $h \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ y $\partial\Omega$ suficientemente regular. Entonces

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} h(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} h \cdot n_j d\theta$$

donde n_j es el vector normal a la frontera en cada punto y $d\theta$ indica la medida de superficie (integramos sobre la frontera).

Proposition 5.5. *Se verifica*

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Proof. **Caso simple**:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v \overset{¿?}{=} \int_\Omega -u \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Aplicamos el lema de Gauss a su resta:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} (u \cdot v) \overset{Lema\_Gauss}{=} \int_{\partial\Omega} (uv)\, n_j d\theta$$

Cuando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que $v_{|\partial\Omega} \equiv 0$, por lo que el término de la derecha es nulo, y tenemos el resultado para el caso simple.
Además, por ser el soporte compacto, no es necesario que $\partial\Omega$ sea suficientemente regular, pues podemos tomar un borde suficientemente regular entre el soporte compacto de v y $\partial\Omega$.
El **caso general** se hace por inducción. □

Corollary 5.6. *Fijada $f \in L^2(\Omega)$, si $u \in C^n(\Omega)$ verifica $Lu = f$, entonces*

$$\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^* \psi \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Definition 5.7. Si $u \in L^2(\Omega)$ verifica

$$\langle f, \psi \rangle = \langle u, L^* \psi \rangle, \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

entonces u es una ***solución débil de la ecuación diferencial*** $\boldsymbol{Lu = f}$.

Theorem 5.8. ***Desigualdad de Poincaré-Friedrich***
Sea Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq k \cdot \|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)}, \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Theorem 5.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.*
Dado un operador diferencial L, existe un operador lineal continuo

$$\begin{array}{rccc} K: & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) \\ & f & \mapsto & K(f) \end{array}$$

tal que

$$L(K(f)) = f \ \ (\textit{débil})$$

Proof. Sea $H_0 = \mathcal{D}(\Omega)$ que es prehilbertiano con el producto escalar $\langle \varphi, \psi \rangle_L = \langle L^*\varphi, L^*\psi \rangle_{L^2(\Omega)}$, y podemos completar y obtener su completado H.
Vamos a desarrollar entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} & H_0 \arrow[dl, "l_0"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "L^*"] & \\ \mathbb{K} & H \arrow[l, "l"] \arrow[r, "L^*"'] & L^2(\Omega) \end{tikzcd}$$

donde notemos que $L^*: H_0 \to L^2$ es lineal y continua en $\langle\rangle_L$ y las líneas punteadas indican que son extensiones a H de las aplicaciones inicialmente definidas en H_0.

Fijado $f \in L^2(\Omega)$, definimos

$$\begin{array}{rccc} l_0: & H_0 & \to & \mathbb{K} \\ & \psi & \mapsto & \langle \psi, f \rangle_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

que es lineal y continua en $(H_0, \langle\rangle_L)$ puesto que es

$$|l_0(\psi)| = |\langle \psi, f \rangle_{L^2}| \overset{Cauchy.Schartz(1)}{\leq} \|\psi\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq$$

$$\overset{Poincaré-Friedrich(s5.8)}{o \leq} k \|L^*\psi\|_{L^2} \|f\|_{L^2} = k' \|L^*\psi\| \overset{L^*\ cta}{\leq} C \|\psi\|_{L^2}$$

Y así, l_0 es continua, y se extiende a $l : H \to \mathbb{K}$ continua ($\|l\| \leq c \|f\|_{L^2}$).
Ahora podemos aplicar el teorema de Riesz a l, de forma que $\exists u \in H : l(\psi) = \langle \psi, u \rangle_L = \langle L^*\psi, L^*u \rangle_{L^2}, \forall \psi \in H$.
Sea $\mu = L^*u \in L^2(\Omega)$. Entonces

$$l(\psi) = \langle L^*\psi, \mu \rangle_{L^*}, \forall \psi \in H$$

Si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\langle \psi, f \rangle_{L^2} = l_0(\psi) = l(\psi) = \langle L^*\psi, \mu \rangle_{L^2}$$

y entonces $K(f) = \mu$ verifica el teorema.
Además

$$\|K(f)\|_{L^2} = \|\mu\|_{L^2} = \|L^*u\|_{L^2} = \|u\|_H = \|l\| \leq C \|f\|_{L^2}$$

luego K es continua. □

5.1 Problema de Dirichlet

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y conexo. Buscamos u tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & en\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$$

Para $n = 2$, podemos definir la **energía integral de Dirichlet**

$$D(u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$$

y buscamos minimizarla.

Lemma 5.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, sean $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ con $v_{|\partial\Omega} = 0$, entonces se verifica:*

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2}$$

Proof. Cuidado con el abuso de la notación:

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u\right) v = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u \cdot v + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u \cdot v \overset{Green}{=} \int_{\partial\Omega} (u_{x_1} v + u_{x_2} v)\, n d\theta - \int_{\partial\Omega} u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2} =$$

$$\overset{v_{|\partial\Omega}=0}{=} -\int_{\partial\Omega} u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2}$$

□

Proposition 5.11. *Si* $\exists u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *que minimiza* $D(u)$ *entre todas las* $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *con* $u_{|\partial\Omega} = f$*, entonces* u *es armónica* ($\Delta u = 0$).

Proof. En $C^2(\Omega)$ introducimos el producto escalar

$$\langle F, G\rangle_D = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_2}$$

de modo que

$$D(u) = \langle u, u\rangle_D$$

Si $v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ con $v_{|\partial\Omega} = 0$, entonces, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, se tiene que $u + \varepsilon v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ y $u + \varepsilon v_{|\partial\Omega} = f$, por lo que se tiene que

$$D(u) \overset{u \text{ minimizante}}{\leq} D(u + \varepsilon v) = D(u) + \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon \langle u, v\rangle_D + \varepsilon \langle v, u\rangle_D$$

lo que implica que

$$0 \leq \varepsilon^2 D(v) + \varepsilon \langle u, v\rangle_D + \varepsilon \langle v, u\rangle_D$$

y esto se da para todo ε real, luego debe ser

$$\langle u, v\rangle_D = 0$$

o sea

$$\int_\Omega u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2} = 0 \overset{\text{Lema anterior}}{\iff} -\int_\Omega \Delta u \cdot v = 0$$

y esto se da para todo $v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ nulo en la frontera, por lo que debe ser $\Delta u = 0$, como queríamos ver. ☐

Objeción de Weierstrass: puede no existir tal u minimizante
Objeción de Hadamard: $D(u)$ puede ser ∞ en u solución del problema frontera
Tenemos, entonces, que ampliar el espacio, encontrando el espacio de Hilbert asociado al producto escalar $\langle \cdot, \cdot\rangle_D$, de forma que podremos salvar estos problemas.
Sea, por tanto, $C^1(\Omega)$ con el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_D = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\, dx$$

con norma asociada

$$\|u\|_D = \langle u, u\rangle_D = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Si la norma es 0, entonces $\nabla u = 0$, y u es constante en cada componente conexa de Ω.

Lemma 5.12. *De Poincaré*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y acotado,* $v \in C^1(\Omega)$ *con* $v_{|\partial\Omega} = 0$*. Entonces*

$$\int_\Omega v(x)^2\, dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

Remark 5.13. Esto quiere decir que si controlamos la convergencia del gradiente, entonces controlamos la convergencia de la propia función.

Supongamos entonces que tenemos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, con $F \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ y $F_{|\partial\Omega} = f$.
Tenemos el espacio

$$H_0 = \left(C^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_D\right)$$

que es prehilbertiano, de modo que podemos obtener su completado H.
Queremos minimizar la energía integral de Dirichlet, y para ello, definimos una sucesión $(u_n)_n \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ con

$$D(u_n) = \|u_n\|_D^2 \searrow \inf\left\{D(u) : u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), u_{|\partial\Omega} = f\right\}$$

Sea el subespacio de H_0:

$$S_0 = \left\{v \in C^1\left(\overline{\Omega} : v_{|\partial\Omega} = 0\right)\right\} \subset H_0$$

y observamos que si $v \neq w$ *en* $S_0 \implies v \neq w$ en H_0. Podemos entonces hablar del completado de S_0, S que será un subespacio cerrado del Hilbert H, y podemos proyectar en S.
Queremos proyectar F en S, sea $P_S(F)$ la proyección de F sobre S y recordemos que hemos tomado la sucesión $(u_n)_n$ como una sucesión minimizante de la norma.
Podemos definir la sucesión $(v_n)_n$ mediante

$$v_n = F - u_n$$

de forma que $(v_n)_n \subset S_0$, porque $(F - u_n)_{|\partial\Omega} = F_{|\partial\Omega} - u_{n|\partial\Omega} = f - f = 0$.
Tenemos, entonces

$$\lim \|u_n\|_D^2 = \lim \|F - v_n\|_D^2$$

es el ínfimo entre estas normas, por lo tanto

$$\lim_n v_n = P_S(F)$$

y tomamos

$$u = \lim_n u_n = F - P_S(F)$$

Solo resta ver la armonicidad de u.
Notamos que $\forall\psi \in S$, es

$$\langle u, \psi\rangle_D = 0$$

o sea que $\lim_n \langle u_n, \psi\rangle_D = 0$.
Tenemos entonces

$$\langle u_n, \psi\rangle_D = \int_\Omega (\nabla u_n \nabla\psi)\, dx \overset{Lema\ anterior}{=} -\int_\Omega (\Delta u_n \cdot \psi)\, dx = -\langle \Delta u_n, \psi\rangle_{L^2(\Omega)}$$

por lo que

$$\langle \Delta u_n, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} \to 0$$

y es

$$\langle \Delta u, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

y u es débilmente armónica. Esto quiere decir que podemos modificarla en un conjunto de medida 0 y hacerla armónica.
Esto que hemos hecho no está totalmente formalizado y no es una demostración, pero sí que muestra las ideas principales de lo que se debería hacer en una.

6 Ejercicios

1. Demuestre que sup $\{|3x+4y| : x^2+y^2=1\} = 5$

Podemos ver $f(X) = 3x+4y$ como una función a la que queremos calcularle la norma, que coincide con la expresión que queremos demostrar. Por el teorema de Riesz-Frechet 2.1, sabemos que existe un único vector $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(X) = \langle X, y\rangle$. Este vector es bastante claramente $y = (3,4)$, pero vamos a calcularlo como en la demostración del teorema.
Calculamos $\ker f$:

$$3x+4y=0 \iff x = -\frac{4}{3}y$$

por lo que

$$\ker f = \left\{\left(-\frac{4}{3}a, a\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$$

y tomamos un vector z en el ortogonal a $\ker f$, que es

$$\ker f^{\perp} = \left\{\left(a, \frac{4}{3}a\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$$

y queremos que $\|z\| = 1$, o sea

$$\|z\|^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 1 \iff a^2\frac{25}{9} = 1 \iff a^2 = \frac{9}{25} \implies a = \frac{3}{5}$$

luego $z = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y entonces $y = f(z)\, z = \left(\frac{9}{5} + \frac{16}{5}\right)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (3,4)$, y entonces

$$\|f\| = \|y\| = 5$$

2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Pruébese que si toda forma lineal en X es continua, entonces X es de dimensión finita. ¿Es cierto el recíproco? Razónese la respuesta.

Por contrarrecíproco, supongamos que X es dimensión infinita, y encontremos una aplicación lineal que no es continua.
Por ser infinito, existe una familia infinita de vectores $(u_n)_n$ linealmente independiente y que podemos suponer normalizado. Definimos $T : X \to \mathbb{N}$ como $T(u_n) = n, \forall n$, $Tx = 0$ si x es linealmente independiente de $(u_n)_n$ y $Tx = T\left(\sum_n a_n u_n\right) = \sum_n a_n n$ si $x = \sum_n a_n u_n$. Esta función es claramente lineal, y no es acotada en la bola unidad, ya que alcanza cualquier natural. Así, por 1.4, esta aplicación no es continua.
El recíproco es cierto, pues las formas lineales en dimensión finita consisten en combinaciones lineales de elementos de la base (finita), y son, por tanto, continuas (podemos razonarlo pensando que se alcanza el máximo en la bola unidad cerrada (compacto)).

3. Demuestre que sup $\left\{|x+4y+9z| : |x|^3+|y|^3+|z|^3 = 1\right\} = 6\sqrt[3]{6}$.

Por la desigualdad de Hölder 1.13

$$|x+4y+9z| \leq |x| + 4|y| + 9|z| \leq \left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + 4^{\frac{3}{2}} + 9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\overset{\text{por la restricción del dominio}}{=} \left(1+2^3+3^3\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^4} = 6\sqrt[3]{6}$$

y basta encontrar elemento que verifique la igualdad. El elemento es $\frac{(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|_3}$.
Otra solución es ver la aplicación en el dual de $\ell^3(3)$, que no es otro que $\ell^{\frac{3}{2}}(3)$, por lo que es $\|f\| = \left(1 + 4^{\frac{3}{2}} + 9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 6\sqrt[3]{6}$.

4. Sea $g \in C[a,b]$ y consideremos la forma lineal $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{L(f) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}$$

Demuestre que L es continua y calcule su norma.

$$|L| = \left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, |g(x)|\, dx \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\, dx < \infty$$

y entonces L es continua (1.4).
Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1) tenemos

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\int_a^b fg dx\right| \leq \|f\|\, \|g\|$$

Así, tenemos

$$\|L\| = \sup\{|Lf| : \|f\| = 1\} \leq \sup\{\|f\|\, \|g\| : \|f\| = 1\} = \|g\|$$

Por otro lado

$$\|Lg\| = \sqrt{\int_a^b g^2 dx} = \|g\|$$

Por lo tanto

$$\|L\| = \|g\|$$

5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $A \subset X$ un conjunto absolutamente convexo (i.e. para cada $x, y \in A$ y cada $|\lambda| + |\mu| \leq 1$,entonces $\lambda x + \mu y \in A$), cerrado y con la propiedad de que para cada $x \in X, \exists n \in \mathbb{N} : x \in nA$. Pruébese que A es un entorno del origen. ¿Es cierto el resultado si la última hipótesis sobre A se reemplaza por la condición de que $\forall x \in X, \exists r > 0 : x \in rA$?

Definition 6.1. Un **espacio de Baire**, X, es un espacio topológico tal que si $\{A_n\}_n$ es una familia contable de conjuntos cerrados con interior vacío, entonces $\bigcup_n A_n$ también tiene interior vacío en X.

Theorem 6.2. ***Teorema de Baire***
Los espacios métricos completos son de Baire

Por tanto, X es un espacio de Baire. Además, como $X = \bigcup_n (nA)$, los nA son cerrados y claramente el interior de X es no vacío, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 A$ tiene interior no vacío. Además, $int(n_0 A) = n_0 \cdot int(A)$, y por tanto A tiene interior no vacío.
Por la convexidad absoluta, $0 \in B = \frac{1}{2} int(A) - \frac{1}{2} int(A) \subset A \implies 0 \in A$. Como B es abierto, entonces $B \subset int(A)$, y entonces $0 \in int(A)$ y A es un entorno del origen.
Si probamos que

$$X = \bigcup_{r>0} rA = \bigcup_n nA$$

tendremos el resultado, aplicando lo ya hecho.
[$\supseteq$] Obvio, pues $n \in \mathbb{N} \implies n > 0$
[$\subseteq$] Si $x \in rA$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$, entonces $x = ra, a \in A$ y por tanto

$$\frac{x}{n} = \frac{r}{n} \cdot a + \left(1 - \frac{r}{n}\right) 0 \overset{*}{\in} A$$

donde $*$ se debe a que $a, 0 \in A$ y que $0 < \frac{r}{n} < 1$. Entonces $b = \frac{r}{n} a + \left(1 - \frac{r}{n}\right) 0 \in A \implies x = nb \implies x \in nA$.

7. Demuestre que la aplicación $T : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right) \to \left(C\left[0,1\right], \|\cdot\|_\infty\right)$ definida por $T\left(x,y\right) = xf + yg$ donde $f\left(t\right) = \cos \pi t$ y $g\left(t\right) = \sin \pi t$ es una isometría sobre su imagen.

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_\infty = \left\|xf + yg\right\|_\infty = \left\|x\cos\pi t + y\sin\pi t\right\|_\infty$$

Ahora bien, $(\cos\pi t, \sin\pi t)$ con $t \in [0,1]$ parametriza la circunferencia superior centrada en 0, S^+, por tanto

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_\infty = \sup\left\{\left|xa+yb\right| : (a,b) \in S^+\right\}$$

Ahora bien, este valor no cambia al cambiar (a,b) por $(-a,-b)$, por lo que es equivalente a considerar

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_\infty = \sup\left\{\left|xa+yb\right| : (a,b) \in S\right\}$$

Por tanto

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_\infty = \sup\left\{\left|xa+yb\right| : (a,b) \in S\right\} = \sup\left\{\left|\left\langle\left(x,y\right),\left(a,b\right)\right\rangle\right| : (a,b) \in S\right\} \overset{Cauchy-Schwarz(1)}{\leq}$$

$$\leq \sup\left\{\left\|\left(x,y\right)\right\|_2 \left\|\left(a,b\right)\right\|_2 : (a,b) \in S\right\} = \left\|\left(x,y\right)\right\|_2$$

Además, si $\left\|\left(x,y\right)\right\|_2 > 0$, entonces tomamos $x_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, y_0 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ de forma que $(x_0,y_0) \in S$, y entonces existe un $t_0 : (x_0,y_0) = (\cos\pi t_0, \sin\pi t_0)$, y por tanto

$$\left\|T\left(x,y\right)\right\|_\infty \geq \left|xx_0 + yy_0\right| = \left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \left\|\left(x,y\right)\right\|_2$$

8. Probar que si M es un subespacio métrico separable todos sus subespacios lo son.

Sea $S \subset M$ no vacío y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M$ un conjunto numerable y denso en M. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$N_\varepsilon = \left\{n \in \mathbb{N} : S \cap B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset\right\}$$

y para cada $n \in N_\varepsilon$ tomamos

$$y_n \in S \cap B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Sea, entonces

$$S_\varepsilon = \{y_n : n \in N_\varepsilon\}$$

Así, si $x \in S$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d\left(x,x_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ (por ser el conjunto $\left(x_n\right)_n$ denso en M), y por tanto $d\left(x,y_n\right) \leq d\left(x,x_n\right) + d\left(x_n,y_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto

$$D = \cup_{n=1}^\infty S_{\frac{1}{n}}$$

es un subconjunto denso y numerable de S.

9. Pruébese que un espacio normado X es separable si, y solo si, existe una sucesión (x_n) tal que el espacio vectorial generado por ella es denso en X.

[$\Longrightarrow$] Obvio, si X es separable, existe un subconjunto $\left(x_n\right)_n$ denso y numerable, como $\left(x_n\right)_n \subset$ *span* $\left(x_n\right)$, entonces este también es denso.
[$\Longleftarrow$] Si $\left(x_n\right)$ es una sucesión tal que *span* $\left(x_n\right)$ es denso en X, entonces podemos tomar el subconjunto $span_{\mathbb{Q}}\left(x_n\right)$ que es el subespacio generado sobre $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces $span_{\mathbb{Q}}\left(x_n\right)$ es denso en *span* $\left(x_n\right)$. Ahora expresamos este espacio vectorial generado de la siguiente forma

$$span_{\mathbb{Q}}\left(x_n\right) = \bigcup_n \left\{\sum_{k=1}^n a_k x_k : a_k \in \mathbb{Q}, 1 \leq k \leq n\right\}$$

y comprobamos por tanto que es numerable, al ser unión numerable de conjuntos finitos.
Así, este conjunto es denso y numerable en X, al serlo en $span\,(x_n)$, que es denso en X. Por tanto, X es separable.

10. Sean $\boldsymbol{Y = \left\{(x_n) \in \ell^1 : x_{2n} = 0\right\}}$ y $\boldsymbol{Z = \left\{(x_n) \in \ell^1 : x_{2n} = \frac{1}{2^n} x_{2n-1}\right\}}$. Pruébese que $\boldsymbol{Y, Z}$ son subespacios cerrados en $\boldsymbol{\ell^1}$ pero que $\boldsymbol{Y + Z}$ no es cerrado en $\boldsymbol{\ell^1}$.

Vamos a usar la caracterización de que un conjunto C es cerrado si, y solo si, toda sucesión convergente converge dentro de C.
Si $\{(x_n)_m\}_m \subset Y$ tiene límite (X_n) entonces para cualquier m, se tiene que $(x_{2n})_m = 0$ y entonces $0 = \lim_m (x_{2n})_m = X_{2n}$, luego $(X_n) \in Y$.
Si $\{(x_n)_m\}_m \subset Z$ tiene límite (X_n) entonces para cualquier m, se tiene que $(x_{2n})_m = \left(\frac{1}{2^n} x_{2n-1}\right)_m$ y además tenemos $(x_{2n-1})_m$, esta relación se mantiene para todo m, luego también se mantiene en el límite y tenemos que $(X_n) \in Z$.
Vamos a ver que la sucesión $x = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, ...\right)$ está en $\overline{Y + Z} \setminus Y + Z$:

$$\left(0, \frac{1}{2}, ..., 0, \frac{1}{2^n}, 0, ...\right) = \left(1, \frac{1}{2}, ..., 1, \frac{1}{2^n}, 0, ...\right) + (-1, 0, -1, 0, ..., -1, 0, ..) \in Z + Y$$

11. Mostrar con un ejemplo que existen espacios normados y sucesiones decrecientes de conjuntos cerrados y acotados con intersección vacía,

Consideremos el espacio $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, que son las sucesiones reales con soporte finito y tomando la norma del supremo. Está claro que este espacio no es completo, puesto que la sucesión de sucesiones $(x_n)_m = (1, ..., 1, 0, ...)$ donde el último 1 está en la posición m, tiene por límite la sucesión $X_n = (1, 1, 1, ..., 1, ...) \notin c_{00}$.
Tomemos ahora

$$F_m = \left\{(x_n) \in c_{00} : x_n \geq \frac{1}{n}, \forall n \leq m\right\}$$

esta sucesión es decreciente, puesto que es cada vez más restrictiva al aumentar m. Sin embargo, $\bigcap_m F_m$ no puede contener elementos con soporte finito, luego es vacía.

12. Pruébese que un subconjunto de un espacio de Banach $\boldsymbol{X}$ es relativamente compacto si, y solo si, para cada $\boldsymbol{\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon}$ relativamente compacto en $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon}$.

Definition 6.3. Recordemos que un conjunto es **relativamente compacto** si su clausura es un conjunto compacto.
Dado $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, una **$\boldsymbol{\varepsilon}$-red para $\boldsymbol{A}$** es un subconjunto $A_\varepsilon \subset A$ tal que, para cada $x \in A, \exists y \in A_\varepsilon$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.
Un conjunto A es **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-red $A_\varepsilon \subset A$ finita.

Proposition 6.4. *En un espacio métrico completo, A es relativamente compacto si, y solo si, A es totalmente acotado.*

Proof. [$\Longrightarrow$] Si A es relativamente compacto, entonces $\overline{A}$ es compacto, y entonces dado un cubrimiento por bolas de radio $\varepsilon > 0$ podemos extraer un subcubrimiento finito. Por tanto, $\overline{A}$ es totalmente acotado. Pero cualquier subconjunto de un conjunto totalmente acotado, también lo es (esto es bastante trivial). Por tanto, A es totalmente acotado.

[$\Longleftarrow$] Primero, veamos que $\overline{A}$ es totalmente acotado. Para ello, como A lo es, existe una ε-red finita de forma que $A \subset \bigcup_{n\in F} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ donde F es un conjunto finito de índices, y entonces $\overline{A} \subset \bigcup_{n\in F} \overline{B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset_{n\in F} B\left(x_i, \varepsilon\right)$ y entonces $\overline{A}$ es totalmente acotado.
Ahora, como X es completo y $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{A}$ es cerrado. Y queremos ver que cualquier sucesión tiene una subsucesión de Cauchy, que sucesión será convergente por la completitud y entonces tendremos la compacidad de $\overline{A}$,y por tanto la compacidad relativa de A.
Sea entonces $(x_n)_n \in \overline{A}$ y para cada n, sea D_n un conjunto finito de X de los centros de bolas de radio 2^{-n} que cubren $\overline{A}$. D_0 es finito, luego existe un $y_0 \in D$ tal que infinitos términos de la sucesión $(x_n)_n$ están en $B\left(y_0, 1\right)$. Sea

$$A_0 = \{n : x_n \in B\left(y_0, 1\right)\}$$

y hemos visto cómo A_0 debe ser infinito (argumento de funciones I, pero es básicamente que si la sucesión es finita, entonces algún elemento se repite indefinidamente y es trivial tomar una subsucesión convergente).
De nuevo, D_1 es finito, luego $\exists y_1 \in D_1 \cap B\left(y_0, 1\right)$ tal que

$$A_1 = \left\{n : x_n \in B\left(y_1, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

es infinito.
Por inducción, si A_k es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces hay un $y_{k+1} \in D_{k+1} \cap B\left(y_k, \frac{1}{2^n}\right)$ tal que

$$A_{k+1} = \left\{n : x_n \in B\left(y, \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right\}$$

es infinito, y repetimos este proceso indefinidamente.
Podemos tomar, ahora, una sucesión creciente de índices $(n_k)_k$ de forma que $n_k \in A_k, \forall k$. Así, la subsucesión $(x_{n_k})_k$ es de Cauchy, puesto que si tomamos $\varepsilon > 0$, entonces existe $k | \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ y para todo $i, j > k$ se tiene que $x_{n_i}, x_{n_j} \in A_k \implies \left|x_{n_i} - x_{n_j}\right| < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. $\square$

Pasamos (por fin) al ejercicio:
[$\Longrightarrow$] Si K es relativamente compacto, entonces (X es completo) es totalmente acotado y entonces tiene una ε- red finita K_ε de forma que $K \subset \bigcup_{x\in K_\varepsilon} B\left(x, \varepsilon\right) = \varepsilon B_X + K_\varepsilon$.
[$\Longleftarrow$] Como dado $\varepsilon > 0$, K verifica que $K \subset \varepsilon B_X + K_\varepsilon$ con K_ε relativamente compacto, entonces K_ε es totalmente acotado y entonces tiene una ε-red finita F_ε. Esta será 2ε-red de K puesto que si $d\left(x, y\right) < \varepsilon, \forall x \in K, y \in K_\varepsilon$ y $d\left(y, z\right) < \varepsilon, \forall y \in K_\varepsilon, z \in F_\varepsilon$, entonces $d\left(x, z\right) < 2\varepsilon, \forall x \in K, z \in F_\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, entonces K es totalmente acotado y por tanto (X completo) relativamente compacto.

13. Pruébese el teorema de Mazur: la envoltura convexa y cerrada de un subconjunto compacto para la norma de un espacio de Banach X es compacto para la norma.

Si K es compacto, para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-red finita F_ε. La envoltura convexa y cerrada K_ε de F_ε es compacta porque se hace en el subespacio de dimensión finita en el que se encuentran los puntos de F_ε.
Ahora bien, $K_\varepsilon + \varepsilon B_X$ es convexo y cerrado:

- Convexo: si $x, y \in K_\varepsilon + \varepsilon B_X$ entonces $x = x_K + x_B$ e $y = y_K + y_B$ con $x_K, y_K \in K_\varepsilon$ y $x_B, y_B \in \varepsilon B_X$, pero entonces como K_ε es convexo, se tiene que para $0 \leq \lambda \leq 1$ se verifica $\lambda x_K + (1-\lambda)\, y_K \in K_\varepsilon$ y de igual forma $\lambda x_B + (1-\lambda)\, y_B \in \varepsilon B_X$, luego $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in K_\varepsilon + \varepsilon B_X$ y es convexo.

- Cerrado: usamos la caracterización de cerrado si, y solo si, los puntos de acumulación están en el conjunto, y como K_ε y εB_X son cerrados y acotados, entonces su suma es cerrada y acotada.

Como $K \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_X$ y este es cerrado y convexo, entonces $\overline{conv\,(K)} \subset K_\varepsilon + \varepsilon B_X$.
Esto lo hacemos para cualquier $\varepsilon > 0$, y por el ejercicio anterior, $\overline{conv\,(K)}$ es relativamente compacto, y como es cerrado en un espacio de Banach (métrico completo) es compacto.

15. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal con la propiedad de que para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a 0 se verifica que $(Tx_n)_n$ es acotada. ¿Es T necesariamente continua?

Supongamos que no es continua. Entonces existe $\varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in X$ tal que $\|x\|_X < \delta$ pero $\|Tx\|_Y \geq \varepsilon$. Tomando $\delta_n = \frac{1}{n}$ obtenemos una sucesión $\{x_n\}_n \to 0$ pero $\{Tx_n\}_n \not\to 0$,pues $\|Tx_n\| \geq \varepsilon > 0, \forall n$. Consideremos la sucesión $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|_X}}$ que tiende a 0, pero $\|Ty_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|x_n\|_X}} \|Tx_n\|_Y \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|x_n\|_X}} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$, en contradicción con la hipótesis del ejercicio.

16. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es abierta
(ii) $\exists \delta > 0 | \{Tx : \|x\| < 1\} \supset \{y \in Y : \|y\| < \delta\}$
(iii) $\exists M > 0 | \forall y \in Y, \exists x \in X : \|x\| \leq M \|y\|, Tx = y$
[$(i) \implies (ii)$] Si T es abierta, lleva abiertos a abiertos. La bola unidad $\{x : \|x\| < 1\}$ es abierta, luego $\{Tx : \|x\| < 1\}$ es abierta. Esto quiere decir que hay una bola abierta en Y centrada en 0 contenida en este conjunto, tal como queríamos ver.
[$(ii) \implies (iii)$] Sea $d < \delta$, entonces dado $y \in Y$, definimos $y' = d\frac{y}{\|y\|} \in B(0, \delta) \subset \{Tx : \|x\| < 1\} \implies \exists x' \in X : \|x'\| < 1 : Tx' = y' = d\frac{y}{\|y\|} \implies y = T\left(\frac{\|y\|}{d}x'\right) = Tx$ y es $\|x\| = \frac{\|y\|}{d}\|x'\| \leq \frac{1}{d}\|y\|$, y $M = \frac{1}{d}$.
[$(iii) \implies (i)$] Si $\|y\| < \frac{1}{M} = \delta$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = Tx$ y $x \in B(0, 1)$ porque $\|x\| \leq M\|y\| < 1$. Así, $B_Y(0, \delta) \subset \{Tx : \|x\| < 1\}$ y entonces este último conjunto es abierto. Y esto basta porque si tenemos otra bola siempre podemos desplazarla al 0 y normalizar los vectores para obtener la bola unidad. Además recordemos que las bolas abiertas son una base de entornos de la topología generada por la distancia.
Deduzca: a) que si T es abierta, entonces T es sobreyectiva; b) que si $Y = \mathbb{R}$y $T \neq 0$, entonces T es abierta; c) que si T es abierta y continua y X es un espacio de Banach, entonces Y es también un espacio de Banach.
a) Por el apartado 3, para cualquier $y \in Y$ existe $x \in X$ con $Tx = y$
b) TODO
c) TODO

17. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Probar que:

i) Todo hiperplano de X es cerrado o denso
ii) Existen hiperplanos densos
i) Recordemos que un hiperplano es un subespacio propio maximal.
Veamos que la clausura de un hiperplano es un subespacio cerrado:

- Cerrado por la definición de clausura
- Solo hay que ver que es un subespacio:

- $x, y \in \overline{H} \implies \exists\, (x_n)_n, (y_n)_n \subset H | x_n \to x, y_n \to y \implies (x_n + y_n)_n \subset H, x_n + y_n \to x + y \implies x + y \in \overline{H}$
- $x \in \overline{H}, a \in \mathbb{R} \implies \exists\, (x_n)_n \subset H | x_n \to x \implies (ax_n)_n \subset H, ax_n \to ax \implies ax \in \overline{H}$

Por tanto, $\overline{H}$ es un subespacio cerrado, si $H = \overline{H}$, entonces H es cerrado. Si $H \subsetneq \overline{H}$, entonces $\overline{H} = X$, pues H es maximal entre los subespacios propios. Y entonces H es denso en X.
ii) $H = P_{H^\perp}^{-1}(\{0\})$, claramente H es cerrado si $P_{H^\perp}$ es continua. Además, el recíproco es cierto por el teorema de la proyección. Por tanto, la existencia de un hiperplano denso equivale a que exista una forma lineal no continua cuyo núcleo sea un hiperplano. Como las formas lineales son aplicaciones lineales de X a $\mathbb{R}$ (de dimensión 1), pueden identificarse los hiperplanos como los núcleos de las formas lineales. Y basta encontrar una forma lineal no continua para concluir que existen hiperplanos densos. Esta forma la dimos en el ejercicio 2 (6).

18. Sea $\boldsymbol{Y}$ un subespacio de dimensión finita de un espacio normado $\boldsymbol{X}$. Pruébese que para cada $\boldsymbol{x + Y \in X/Y, \exists z \in x + Y | \, \|z\| = \|x + Y\|}$.

Sea $K = \{u \in x + Y : \|u\| \leq \|x\|\}$. Entonces

$$\|x + Y\| = \inf\{\|u\| : u \in x + Y\} = \inf\{\|u\| : u \in K\}$$

puesto que los puntos de $x + Y$ que no están en K tienen una norma mayor o igual que la de x.
Como $x + Y$ es un subespacio afín de dimensión finita, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ y se verifica la propiedad de Heine-Borel: Compacto sii Cerrado+Acotado. K es cerrado y acotado, por lo que es compacto, y puesto que $\|\cdot\|$ es continua, entonces alcanza su ínfimo en K, $\exists z \in K : \|x + Y\| = \|z\|$.

20. Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio prehilbertiano.

(i) Describa todos los pares de vectores $\boldsymbol{x, y}$ tales que

$$\|\boldsymbol{x + y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

(ii) Describa todos los pares de vectores $\boldsymbol{x, y}$ tales que

$$\|\boldsymbol{x + y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

(i)

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$$

Y

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

Y entonces, la igualdad se verifica si, y solo si

$$2\langle x, y \rangle = 2\|x\|\,\|y\| \iff \langle x, y \rangle = \|x\|\,\|y\|$$

Y diferenciamos los siguientes casos:

- $x = 0$ ó $y = 0$, se verifica de forma trivial. Por lo que suponemos a partir de ahora que $x, y \neq 0$.
- $x \perp y$: entonces debería ocurrir $\|x\|\,\|y\| = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ ó \\ y = 0 \end{cases}$, pero esto no puede suceder. A partir de ahora suponemos que $x \not\perp y$

- x, y L.D.: $x = \lambda y$, entonces $\langle x, y \rangle = \lambda \|y\|^2$ y $\|x\| \|y\| = |\lambda| \|y\|^2$, por lo que se verifica la igualdad si, y solo si, $\lambda = |\lambda|$, o sea $\lambda \geq 0$.
- x, y L.I.: entonces podemos escribir $H = span\,(y) \oplus span\,(y)^{\perp}$ y será $x = \lambda y + z$ con $0 \neq z \perp y$.

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle \lambda y + z, y \rangle^2 = (\langle \lambda y, y \rangle + \langle z, y \rangle)^2 \overset{\langle z,y \rangle = 0}{=} \lambda^2 \|y\|^4$$

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = \|\lambda y + z\|^2 \|y\|^2 = \left(\lambda^2 \|y\|^2 + \|z\|^2\right) \|y\|^2 = \lambda^2 \|y\|^4 + \|z\|^2 \|y\|^2$$

y estos valores son distintos porque $\|z\| \neq 0$.

Por tanto, la primera igualdad se da si, y solo si, x e y son colineales positivamente.
(ii)

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \iff 2\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$$

21. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y sea $\{H_i : i \in I\}$ una colección de subespacios cerrados mutuamente ortogonales. Para cada $i \in I$, sea $P_i : H \to H_i$ la proyección ortogonal de H sobre H_i. Pruébese que para cada $x \in H$, el conjunto $\{i \in I : P_i(x) \neq 0\}$ es, a lo sumo, numerable.

Dado $x \in H$, el conjunto $\{P_i(x)\}_{i \in I}$ es ortogonal, puesto que lo son los subespacios H_i. Entonces, por la desigualdad de Bessel (2.19):

$$\sum_{i \in I} \|P_i(x)\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle P_i(x), P_i(x) \rangle|^2 \overset{*}{=} \sum_{i \in I} |\langle P_i(x), P_i(x) \rangle + \langle y, P_i(x) \rangle|^2 =$$

$$= \sum_{i \in I} |\langle P_i(x) + y, P_i(x) \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, P_i(x) \rangle|^2 \overset{Bessel}{\leq} \|x\|^2$$

donde $*$ se debe a que $y = x - P_i(x) \perp P_i(x)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{i \in I : \|P_i(x)\| > \frac{1}{n}\right\}$ debe ser finito, pues en caso contrario

$$\|x\| \geq \sum_{i \in I} \|P_i(x)\| > \sum_{i \in I} \frac{1}{n} = \infty\#$$

Por tanto, como $\{i \in I : P_i(x) \neq 0\} = \bigcup_n \left\{i \in I : \|P_i(x)\| > \frac{1}{n}\right\}$ es unión numerable de conjuntos finitos, y por tanto numerable.

22. Pruebe que la norma en un espacio prehilbertiano real H es diferenciable en todos los puntos salvo en el origen y calcule su diferencial.

Recordemos que podemos ver el diferencial de una función f como una aplicación lineal L tal que

$$f(x + h) - f(x) = Lh + o(\|h\|)$$

Veamos primero que $f(x) = \|x\|^2$ es diferenciable en H.

$$f(x + h) - f(x) = \langle x + h, x + h \rangle - \langle x, x \rangle = 2\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle$$

y como $\langle x, h \rangle$ es lineal y $\langle h, h \rangle = \|h\|^2 = o(\|h\|)$, deducimos que

$$df(x)(\cdot) = 2\langle x, \cdot \rangle$$

Y es diferenciable en todo H.
Ahora bien, la norma es la composición de f con la raíz cuadrada, que sabemos que es diferenciable $\forall x > 0$ y como $f \geq 0$, tenemos que $\|\cdot\| = \sqrt{f(\cdot)}$ es diferenciable en $H \setminus \{0\}$.
Para calcular la diferencial, usamos la regla de la cadena:

$$d\|x\|(h) = d\sqrt{f(x)}(h) = \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}}(h) = \frac{2\langle x, h\rangle}{2\sqrt{f(x)}}(h) = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}$$

23. Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ su esfera unidad. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X es un espacio prehilbertiano
(ii) Cada subespacio de X de dimensión 2 es un espacio prehilbertiano
(iii) Si P es un plano pasando por el origen, entonces $P \cap S$ es una elipse con centro en el origen
[$(i) \implies (ii)$] Sea Y de dimensión 2, entonces si $x, y \in Y$ definimos

$$\langle x, y\rangle_Y = \langle x, y\rangle$$

Veamos que es un producto escalar:

- $\langle ax + by, z\rangle_Y = \langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle = a\langle x, z\rangle_Y + b\langle y, z\rangle_Y$
- $\langle x, y\rangle_Y = \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = \langle y, x\rangle_Y$
- $\langle x, x\rangle_Y = \langle x, x\rangle \geq 0,\ 0 = \langle x, x\rangle_Y = \langle x, x\rangle \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

[$(ii) \implies (i)$] Dado $x, y \in X$, basta ver que verifican la ley del paralelogramo. Supongamos que son linealmente independientes y sea $Y = \mathit{span}(x, y)$, entonces la norma en X coincide con la norma en Y, y tanto $x + y$ como $x - y$ están en Y por ser un subespacio. Por tanto, x, y verifican la ley del paralelogramo, para todo $x, y \in X$. Y por el teorema de Jordan-Von Neumann (2.5) tenemos el resultado.
[$(i) \implies (iii)$] Si X es prehilbertiano, entonces existe un producto escalar que genera la norma. Sean e_1, e_2 dos vectores ortonormales en P. Entonces

$$P \cap S = \left\{x = x_1e_1 + x_2e_2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$$

y por tanto es una circunferencia de centro el origen respecto de la base $\{e_1, e_2\}$. Respecto a cualquier otra base, haremos una transformación afín y obtendremos una elipse.
[$(iii) \implies (ii)$] Si P es un espacio vectorial de dimensión 2 y $P \cap S$ es una elipse de semiejes a, b respecto de cierta base ortonormal del espacio P, $\{e_1, e_2\}$, entonces cualquier $x \in P \cap S$ puede escribirse como $x = x_1e_1 + x_2e_2$ y como la intersección es una elipse, se tiene

$$\|x\|^2 = 1 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2$$

De esta forma, respecto de esa base de P, la fórmula de la norma es esta.
Pero esta norma se corresponde con el siguiente producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2\rangle = x_1y_1a^{-2} + x_2y_2b^{-2}$$

Part II

Teoría Espectral de Operadores compactos normales

7 Inversión de operadores. Espectro

Definition 7.1. Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Se dice que T es **invertible** si existe un operador $S \in L(Y, X)$ tal que $ST = I_X$ y $TS = I_Y$, donde I_X, I_Y son los operadores identidad en X e Y. Se denota $S = T^{-1}$.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $L(X)$ el espacio de las aplicaciones lineales de X en sí mismo, de forma que $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ y si $\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, entonces $T_n(x) \to T(x), \forall x \in X$ uniformemente sobre acotados.

Teorema de Von Neumann

Theorem 7.2. *Sea $K \in L(X)$ invertible y $L = K - A$.*
Si $\|A\| < \frac{1}{\|K^{-1}\|}$ entonces L es invertible.

Proof. **Caso 1:** $K = Id$, y estudiamos, entonces $Id - B$ con $\|B\| < 1$, ¿es $Id - B$ invertible?
Sea

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \qquad (*)$$

donde B^n es B compuesta consigo misma n veces.
Esta serie será convergente si, y solo si, es normalmente convergente (converge la serie de las normas).
Veamos que es así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \overset{\|TS\|\leq\|T\|\|S\|}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n \overset{suma\ geométrica}{=} \frac{1}{1 - \|B\|}$$

Por lo que la serie es normalmente convergente y entonces S es convergente.
Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$:

$$BS = B\sum_{n=0}^{\infty} B^n = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} B^n = S - Id$$

$$SB = S - Id$$

y entonces

$$S(Id - B) = S - SB = S - S + Id = Id$$

$$(Id - B)S = S - BS = S - S + Id = Id$$

Caso general

$$K - A = K\left(Id - K^{-1}A\right)$$

K es invertible e $Id - K^{-1}A$ es invertible si $\left\|K^{-1}A\right\| < 1$, por el caso 1, como la composición de operadores invertibles es invertible, entonces $K - A$ será invertible si se verifica esa misma desigualdad.
Por hipótesis, $\|A\| < \frac{1}{\|K^{-1}\|} \implies \left\|K^{-1}A\right\| \leq \left\|K^{-1}\right\| \|A\| < 1$, y tenemos el resultado. □

Remark 7.3. Observando la fórmula $(*)$ tenemos

$$\left(K-A\right)^{-1}=\left(K\left(Id-K^{-1}A\right)\right)^{-1}=\left(Id-K^{-1}A\right)^{-1}K^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(K^{-1}A\right)^{n}K^{-1} \qquad (**)$$

Definition 7.4. Sea $M:X\to X$ un operador (aplicación lineal y continua), entonces la **resolvente del operador** es

$$\rho\left(M\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left(\lambda Id-M\right)\ invertible\right\}$$

y el **espectro del operador** es

$$\sigma\left(M\right)=\mathbb{C}\setminus\rho\left(M\right)$$

Theorem 7.5. *Se tiene:*

1. $\rho\left(M\right)$ *es abierto*
2. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc}\rho\left(M\right) & \xrightarrow{\phi} & L\left(X\right)\\ \lambda & \mapsto & \left(\lambda Id-M\right)^{-1}\end{array}$$

es análitica (se puede desarrollar como serie de potencias), por lo que vale el teorema de Liouville:

$$\lim_{\|\lambda\|\to\infty}\left\|\phi\left(\lambda\right)\right\|=0\implies\phi\ cte$$

Proof. Veamos las dos afirmaciones:

1. Sea $\lambda\in\rho\left(M\right)$, entonces $K=\lambda Id-M$ es invertible y sea $A=hId$, entonces, por el teorema de Von Neumann, $K-A=\left(\lambda-h\right)Id-M$ es invertible si h es suficientemente pequeño.

   Por tanto, $\lambda-h\in\rho\left(M\right),\forall h,\left\|h\right\|<\left\|\left(\lambda Id-M\right)^{-1}\right\|^{-1}$ y $\rho\left(M\right)$ es abierto.

2. Más aún, la fórmula $(**)$ nos dice

$$\left(\left(\lambda-h\right)Id-M\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\lambda Id-M\right)^{-1}h\right)^{n}\left(\lambda Id-M\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\lambda Id-M\right)^{-1}\right)^{n+1}h^{n}$$

   que es un desarrollo como serie de potencias convergente para $\left\|h\right\|<\left\|\left(\lambda Id-M\right)^{-1}\right\|^{-1}$.

□

Teorema de Gelfand

Theorem 7.6. *Sea $M\in L\left(X\right)$, entonces $\sigma\left(M\right)$ es un compacto no vacío.*

Proof. Como $\rho\left(M\right)$ es abierto, entonces $\sigma\left(M\right)$ es abierto, pues es su complementario. Veamos que es acotado
Veamos que $\left|h\right|>\left\|M\right\|\implies h\notin\sigma\left(M\right)$.

Para ello, aplicamos el teorema de Von Neumann con $B = h^{-1}M$, se tiene que

$$(hId - M)^{-1} = h^{-1}\left(Id - Mh^{-1}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n h^{-(n+1)}$$

que será convergente si $\left\|Mh^{-1}\right\| < 1 \iff |h| > \|M\|$.
Por tanto, si $|h| > \|M\|$, entonces $h \in \rho(M) \implies h \notin \sigma(M)$, y este conjunto es acotado.
Así, es cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, por lo que es compacto.
Para ver que no es vacío, suponamos por reducción al absurdo que lo es. En tal caso $\phi : \mathbb{C} \to L(X)$ sería entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) con $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$ con $\phi'(\lambda) = Id$.
Además, $\lim_{\|\lambda\| \to \infty} = 0$:

$$\|\phi(\lambda)\| = \left\|(\lambda Id - M)^{-1}\right\| = \left\|\lambda^{-1}\left(Id - M\lambda^{-1}\right)^{-1}\right\| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|M\lambda^{-1}\right\|^n = |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - \|M\lambda^{-1}\|} =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|\left(1 - \|M\lambda^{-1}\|\right)} \leq \frac{1}{|\lambda|\left(1 - \|M\|\,|\lambda|^{-1}\right)} = \frac{1}{|\lambda| - \|M\|} \overset{|\lambda| \to \infty}{\to} 0$$

Y entonces, por el teorema de Liouville, ϕ es constante, pero esto implica que $\phi' = 0\#$ contradicción, ϕ es entera con derivada no nula. $\square$

Definition 7.7. Sea $T : H \to H$ lineal y continua.
Dado $y \in H$, definimos la función $\phi : H \to \mathbb{R}$ mediante $\phi(x) = \langle Tx, y\rangle$, que es lineal y continua.
Luego, por el teorema de Riesz, existe $z \in H$ tal que $\phi(x) = \langle x, z\rangle$.
Definimos, entonces, para cada $y \in H$, la aplicación $T^* : H \to H$ dada por $T^*(y) = z$ y se denomina **operador adjunto de T**.
La ecuación que lo define intrínsecamente es

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,,\ \forall x, y \in H$$

Un operador T se dice **autoadjunto** si $T = T^*$.
De forma más general, si $T : H_1 \to H_2$, podemos definir su adjunto, T^*, como la aplicación $T^* : H_2 \to H_1$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,,\ \forall x \in H_1, y \in H_2$$

Proposition 7.8. *H_1, H_2 Hilbert, $T : H_1 \to H_2$ operador lineal continuo. Entonces existe un único operador lineal $T^* : H_2 \to H_1$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \forall x \in H_1, y \in H_2$. Además $\|T\| = \|T^*\|$.*

Proof. Para cada $y \in H_2$, definimos la aplicación lineal continua

$$f_y(w) = \langle w, y\rangle\,,\ \forall w \in H_2$$

Consideremos ahora $f_y \circ T : H_1 \to \mathbb{R}$, que es

$$f_y \circ T(x) = \langle Tx, y\rangle$$

Por el teorema de Riesz (2.1) existe un único $z \in H_1$ de forma que

$$f_y \circ T(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$$

Y haciendo $z = T^* y$ tenemos que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle z, T^* z \rangle$$

como queríamos. Esta aplicación es lineal y tenemos el resultado. La igualdad de las normas la vemos en las observaciones siguientes. $\square$

Ejemplo: Sea M un subespacio cerrado de H un Hilbert. Entonces el operador proyección P_M, es autoadjunto:

$$\langle P_M x, y \rangle = \langle P_M (x_M + x_{M^\perp}), y \rangle = \langle x_M, y_M + y_{M^\perp} \rangle = \langle x_M, y_M \rangle + \langle x_M, y_{M^\perp} \rangle = \langle x_M, y_M \rangle = \langle x_M, P_M(y) \rangle$$

Remark 7.9.

$$\|T\| = \sup \{ \langle Tf, g \rangle : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1 \}$$

Proof.

$$\|T\| = \sup \{ \|Tf\| : \|f\| \leq 1 \} = \sup \{ \sup \{ |\langle Tf, g \rangle| : \|g\| \leq 1 \} : \|f\| \leq 1 \} =$$

$$= \sup \{ |\langle Tf, g \rangle| : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1 \} = \sup \{ \langle Tf, g \rangle : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1 \}$$

$\square$

Remark 7.10.

$$\|T\| = \|T^*\|$$

Remark 7.11. Si $T = T^*$ entonces

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1 \} = M$$

Proof. [$\geq$]

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tf, g \rangle| : \|f\|, \|g\| \leq 1 \} \geq \sup \{ |\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1 \}$$

[$\leq$]

$$\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{4} \left[\langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle \right]$$

y entonces

$$|\langle Tf, g \rangle| \leq \frac{1}{4} \left[|\langle T(f+g), f+g \rangle| + |\langle T(f-g), f-g \rangle| \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left| \left\langle T\left(\frac{f+g}{\|f+g\|} \right), \frac{f+g}{\|f+g\|} \right\rangle \right| \|f+g\|^2 + \left| \left\langle T\left(\frac{f-g}{\|f-g\|} \right), \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\rangle \right| \|f-g\|^2 \right] \leq$$

$$\leq \frac{M}{4} \left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \right] \overset{\textit{ley paralelogramo}(1)}{=} \frac{M}{4} \left[2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \right] \leq \frac{M}{4} 4 = M$$

$\square$

Proposition 7.12. *Sean H un Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y $A, B \in L(H)$. Se verifica:*

1. $A = A^* \implies \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$ *y*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

   En particular, los valores propios de A son reales.

2. $A = A^*, \langle Ax, x\rangle = 0, \forall x \in H \implies A = 0$
3. $A = A^* \implies H = kerA \oplus \overline{ImA}$
4. A, B *autoadjuntos* $\implies A + B$ *autoadjunto y* $[AB$ *autoadjunto* $\iff AB = BA]$
5. $\mathbb{K} = \mathbb{C} \implies [A = A^* \iff \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H]$
6. $\mathbb{K} = \mathbb{C} \implies \exists S, T \in L(H)$ *únicos y autoadjuntos tales que* $A = S + iT$

Proof. Veamos cada afirmación:

1. $$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} \implies \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$$

   Y la igualdad la vimos en las observaciones anteriores.

2. Por el apartado anterior se tiene que $\|A\| = 0$, y por tanto $A = 0$.

3. Más adelante veremos que $kerA$ es finito-dimensional, por lo que es cerrado y entonces podemos aplicar el teorema de la proyección

$$H = kerA \oplus (kerA)^{\perp} \stackrel{*}{=} kerA \oplus \overline{ImA}$$

   donde $*$ se debe a que si tomamos $x \in kerA$, entonces $Ax = 0$, y entonces $\langle Ax, y\rangle = 0, \forall y \implies \langle x, Ay\rangle = 0, \forall y$, por lo que $x \in (ImA)^{\perp} \implies kerA \subset (ImA)^{\perp}$, y claramente $(ImA)^{\perp} \subset kerA$. Por tanto, $kerA = (ImA)^{\perp}$, y entonces

$$(kerA)^{\perp} = (ImA)^{\perp\perp} = \overline{ImA}$$

4. $$\langle (A + B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle x, By\rangle = \langle x, (A + B)y\rangle$$

$$AB = (AB)^* \iff \langle ABx, y\rangle = \langle x, ABy\rangle$$

   ahora bien, se tiene

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, Ay\rangle = \langle x, BAy\rangle$$

   por tanto, se da la igualdad, si, y solo si, $AB = BA$.

5. [$\Longleftarrow$] Si $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$, entonces

$$\langle A(x + ay), x + ay\rangle \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H$$

   ahora bien

$$\langle A(x + ay), x + ay\rangle = \langle Ax + aAy, x + ay\rangle = \langle Ax, x\rangle + \overline{a}\langle Ax, y\rangle + a\langle Ay, x\rangle + a\overline{a}\langle Ay, y\rangle =$$

$$= \langle Ax, x\rangle + \overline{a}\langle x, A^*y\rangle + a\langle Ay, x\rangle + |a|^2\langle Ay, y\rangle$$

como $\langle Ax, x\rangle, |a|^2\langle Ay, y\rangle \in \mathbb{R}$, entonces debe ser $a\langle Ay, x\rangle + \overline{a\langle A^*y, x\rangle} \in \mathbb{R}$, por tanto debe ser igual a su conjugado:

$$a\langle Ay, x\rangle + \overline{a\langle A^*y, x\rangle} = \overline{a\langle Ay, x\rangle} + a\langle A^*y, x\rangle$$

y entonces

$$a\langle (A - A^*)y, x\rangle = \overline{a\langle (A - A^*)y, x\rangle}$$

Tomando ahora $a = 1$, obtenemos

$$\langle (A - A^*)y, x\rangle = \overline{\langle (A - A^*)y, x\rangle}$$

y con $a = i$, sale

$$i\langle (A - A^*)y, x\rangle = -i\overline{\langle (A - A^*)y, x\rangle} \iff \langle (A - A^*)y, x\rangle = -\overline{\langle (A - A^*)y, x\rangle}$$

por tanto, debe ser

$$\langle (A - A^*)y, x\rangle = 0, \forall x, y \in H$$

y entonces $A = A^*$.

[$\Longrightarrow$] Apartado 1.

6.
$$A = \frac{A + A}{2} + i\frac{A - A}{2i} = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i} = S + iT$$

□

Definition 7.13. Un operador $T : B_1 \to B_2$ donde B_1 y B_2 son espacios de Banach, se dice **compacto** cuando $T(B_{B_1})$ (la imagen por T de la bola unidad en B_1) es relativamente compacto en B_2.

De esta definición, por la compacidad relativa, se deducen las siguientes definiciones equivalentes:

- T compacto
- Para cada sucesión acotada en norma $(x_n)_n$, la sucesión $(Tx_n)_n$ posee una subsucesión convergente
- Para cada sucesión $(x_n)_n$ con $\|x_n\| = 1, \forall n$, la sucesión $(Tx_n)_n$ posee una subsucesión convergente

Y se tiene que:

Proposition 7.14. *X, Y normados. Entonces el conjunto $\mathcal{K}(X, Y)$ de los operadores compactos de X en Y es un subespacio vectorial de $L(X, Y)$, cerrado si Y es de Banach.*

Proof. $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio vectorial de $L(X, Y)$ porque en espacios normados la suma de conjuntos compactos y la multiplicación por un escalar de conjuntos compactos producen conjuntos compactos.
Ahora, en un espacio métrico M, un conjunto relativamente compacto $P \subset M$ es precompacto, o sea, $\forall \varepsilon > 0, \exists (t_i)_{1\leq i\leq n}$ en P tales que $P \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B(t_i, \varepsilon)$. Recíprocamente, los conjuntos precompactos son relativamente compactos cuando el espacio métrico es completo.

Supongamos ahora que Y es Banach y sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores en $\mathcal{K}(X,Y)$ convergente a $T \in L(X,Y)$. Queremos ver que $T(B_X)$ es precompacto. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Como T_n es compacto, existe un conjunto finito $(x_j)_{j\in J}$ en B_X tal que, fijado $x \in B_X$ podemos encontrar $i \in J$ con $\|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces

$$\|Tx - Tx_i\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|Tx_i - T_n x_i\| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

y entonces $T(B_X)$ es precompacto, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ y este es cerrado. □

Proposition 7.15. *X, Y normados, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Entonces*

1. *ImT es un subespacio separable de Y*
2. *Si Y es de Hilbert, $(e_n)_n$ es una base hilbertiana de $\overline{ImT}$ y P_n es la proyección ortogonal de Y en span $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces*

$$T = \lim_n P_n T \text{ en } L(X,Y)$$

Proof. Veamos ambas afirmaciones:

1. Como $T(B_X)$ es relativamente compacto, entonces $T(B_X)$ es precompacto y lo mismo ocurre con $nT(B_X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Los subconjutos precompactos en espacios normados son separables, por lo que $ImT = \bigcup_n nT(B_X)$ es separable.

2. Supongamos que ImT es de dimensión finita, pues si es finita es obvio. Como Y es Hilbert, entonces $\overline{ImT}$ es un espacio de Hilbert separable, y podemos tomar una base ortonormal numerable $(e_n)_n$. Sea P_n la proyección descrita en el enunciado. Para $x \in B_X$, se tiene

$$Tx = \lim_n P_n Tx$$

La compacidad de T nos va a permitir probar que este límite es uniforme en la bola unidad de X. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists\,(x_j)_{j\in J}$ finito en B_X tal que, fijado $x \in B_X, \exists j \in J : \|Tx - Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N} : \|Tx_j - P_n Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall j \in J, \forall n > n_0$. Entonces

$$\|Tx - P_n Tx\| \leq \|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - P_n Tx_j\| + \|P_n Tx_j - P_n Tx\| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

puesto que $\|P_n\| = 1$. Como $x \in B_X$ es arbitrario, entonces $\|T - P_n T\| < \varepsilon, \forall n > n_0$, y tenemos el resultado.

□

Corollary 7.16. *El conjunto de los operadores compactos en un espacio de Hilbert es la clausura, en la topología de la norma de operadores, del conjunto de los operadores acotados de rango finito.*

Corollary 7.17. *H_1, H_2 Hilbert y $T \in L(H_1, H_2)$. Entonces T es compacto si, y solo si, T^* es compacto*

Proof. Como $T^{**} = T$, basta ver la suficiencia.
Como T es compacto, entonces existe una sucesión de operadores $(T_n)_n$ acotados de rango finito con $T = \lim_n T_n$ en la norma de de operadores. Es decir, $\lim_n \|T - T_n\| = 0$.
Adenás, T_n^* es también acotado y de rango finito:

- acotado porque $\|T_n\| = \|T_n^*\|$

- de rango finito porque, si no, se podríamos tomar $(e_m)_m$ una sucesión ortonormal en ImT_n^* con $e_m = Tu_m, \forall m$. Como T_n son todas de rango finito, entonces existe k tal que $T_n e_k = 0$. Y entonces
$$0 = \langle T_n e_k, u_k \rangle = \langle e_k, T_n u_k \rangle = \langle e_k, e_k \rangle = 1$$
lo cual es una contradicción, y T_n^* debe tener rango finito

Por último, como $\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\|$, tenemos que $T^* = \lim_n T_n^*$ y por tanto T^* es compacto. □

Proposition 7.18. *Sea H un espacio de Hilbert y $(e_k)_k$ una base ortonormal.*
Sea $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$ una sucesión acotada.
Sea T la aplicación dada por
$$Te_k = \lambda_k e_k$$
y dado $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ es
$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$$
Entonces

1. $\|T\| = \sup \{|\lambda_k| : k = 1, ...\}$
2. T^* *se corresponde con* $T^*(e_k) = \overline{\lambda_k} e_k$
3. $T = T^* \iff \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall k$
4. T *es una proyección ortogonal si, y solo si,* $\lambda_k \in \{0, 1\}, \forall k$
5. T *es compacto si, y solo si,* $\lim_k \lambda_k = 0$

Theorem 7.19. *Sea $T : H \to H$ lineal y continua, con H un Hilbert separable.*

1. $S : H \to H$ *compacto, entonces* $S \circ T, T \circ S$ *compactos*
2. *Si* $T_n : H \to H, n = 1, 2, ...$ *son compactos y* $\lim_n \|T_n - T\| = 0$, *entonces* T *es compacto*
3. *Si* T *es compacto, entonces* $\exists T_n : H \to H, n = 1, 2, ...$ *operadores de rango finito, con* $\|T_n - T\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$
4. T *compacto* $\iff T^*$ *compacto*

Proof. Veamos cada afirmación:

1. Obvio, porque la imagen de un relativamente compacto por una aplicación continua es relativamente compacta
2. Sea la sucesión $(f_k)_k \subset B_H$ y veamos que $(T(f_k))_k$ tiene una subsucesión convergente:
   - Como T_1 es compacto, entonces $\exists (f_{1,k})_k$ subsucesión de $(f_k)_k$ tal que $(T_1(f_{1,k}))_k$ es convergente
   - Como T_2 es compacto, entonces $\exists (f_{2,k})_k$ subsucesión de $(f_{1,k})_k$ tal que $(T_2(f_{2,k}))_k$ es convergente
   - ...

- Como T_n es compacto, entonces $\exists \left(f_{n,k}\right)_k$ subsucesión de $\left(f_{n-1,k}\right)$ tal que $\left(T_n\left(f_{n,k}\right)\right)_k$ es convergente
- ...

Entonces la sucesión $\left(T\left(f_{k,k}\right)\right)_k$ es subsucesión de $\left(T\left(f_k\right)\right)_k$ que es de Cauchy:

$$\left\|T\left(f_{k,k}\right)-T\left(f_{l,l}\right)\right\| \leq \left\|T\left(f_{k,k}\right)-T_m\left(f_{k,k}\right)\right\|+\left\|T_m\left(f_{k,k}\right)-T_m\left(f_{l,l}\right)\right\|+\left\|T_m\left(f_{l,l}\right)-T\left(f_{l,l}\right)\right\| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

donde $(*)$ se debe a que podemos elegir $m_0|\forall m > m_0$ se tiene $\|T-T_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$ y para el m que tomemos, $\exists n_0|\forall k,l > n_0$ se verifica que $\left\|T_m\left(f_{k,k}\right)-T_m\left(f_{l,l}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por tanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0| \left\|T\left(f_{k,k}\right)-T\left(f_{l,l}\right)\right\| < \varepsilon, \forall k,l > n_0$, por lo que la sucesión es de Cauchy, y el espacio es de Hilbert (completo) por lo que la sucesión es convergente y T es compacto.

3. Sea $\left(e_i\right)_i$ una base hilbertiana. Sean las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} Q_n: & H & \rightarrow & \overline{span\left\{e_i : i > n\right\}} \\ & g & \mapsto & \sum_{i>n}\left\langle g, e_i\right\rangle e_i \end{array}$$

Se tiene entonces que

$$\left\|Q_n g\right\|^2 \overset{Pitágoras}{=} \sum_{i>n}\left|\left\langle g, e_i\right\rangle\right|^2 \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

porque $\left(\left\langle g, e_i\right\rangle\right)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$ (es una sucesión con serie cuadrática sumable).

Afirmación: $\left\|Q_n T\right\| \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

En tal caso, se tiene que $Id = P_n + Q_n$ donde P_n es la proyección en *span* $\left\{e_1,\ldots,e_n\right\}$ y entonces $T = P_nT + Q_nT$, por lo que $\left\|T-P_nT\right\| = \left\|Q_nT\right\| \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ y $T_n = P_nT$ aproxima T y tiene rango finito $\forall n$.

Veamos entonces la afirmación:

$$\left\|Q_nT\right\| = \sup\left\{\left\|Q_nT(f)\right\| : \|f\| \leq 1\right\} = \sup\left\{\left\|Q_ng\right\| : g \in T\left(B_H\right)\right\}$$

y como la sucesión $\left(Q_n\right)$ es equicontinua y $Q_ng \rightarrow 0, \forall g$, entonces el teorema de Ascoli asegura que $Q_n \rightarrow 0$ uniformemente en $T\left(B_H\right)$, y esto es lo que queríamos ver.

□

Teorema de Hilbert-Schmidt

Theorem 7.20. *Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \rightarrow H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\left(v_k\right)_k$ de H con*

$$Tv_k = \lambda_k v_k$$

$$\lambda_k \in \mathbb{R}, \forall k$$

$$\lim_k \left|\lambda_k\right| = 0$$

Remark 7.21. En esta situación, dado $x = \sum_k \left\langle x, v_k\right\rangle v_k$ se tiene

$$T(x) = T\left(\sum_k \left\langle x, v_k\right\rangle v_k\right) = \sum_k \lambda_k \left\langle x, v_k\right\rangle v_k$$

Proof. Para esta demostración, iremos enunciado distintas proposiciones y su demostración, hasta tenerlo:

Proposition 7.22. *Si $T = T^*$ en H y $Tv = \lambda v$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$*

Proof.

$$\lambda \langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^* v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda} \langle v, v\rangle \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Proposition 7.23. *Si T es compacto, entonces $\forall \lambda \neq 0$ se tiene que ker $(T - \lambda Id)$ es finito-dimensional*

Proof. Supongamos que no es finito-dimensional, de manera que podemos tomar un conjunto ortonormal $(y_n)_n \subset ker\,(T - \lambda Id)$. Entonces, como T es compacto y el conjunto es ortonormal ($\|y_n\| = 1, \forall n$), sabemos que $(T(y_n))_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero dado que

$$Ty_n = \lambda y_n, \forall n$$

entonces se verifica

$$\left\|Ty_{n_j} - Ty_{n_k}\right\| = \left\|\lambda y_{n_j} - \forall y_{n_k}\right\| = |\lambda| \left\|y_{n_j} - y_{n_k}\right\| \overset{j \neq k}{=} |\lambda| \sqrt{2}$$

Por lo que es una subsucesión supuestamente convergente, que no es de Cauchy, lo cual es una contradicción, obtenida al suponer que el subespacio no era finito-dimensional. Así, debe ser así y tenemos el resultado. □

Proposition 7.24. *$T = T^*$ compacto. Entonces, o bien $\|T\|$ o bien $-\|T\|$ es un valor propio de T.*

Proof. Como $T = T^*$, entonces $\|T\| = \sup \{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leq 1\}$. La idea es buscar una solución del problema:

$$\begin{array}{lll} (P): & \max & |\langle Tf, f\rangle| \\ & s.a. & \|f\| = 1 \end{array}$$

Sea la sucesión $(f_n)_n$ que verifica $\|f_n\| \leq 1$ y $\langle Tf_n, f_n\rangle \overset{n\to\infty}{\to} \lambda$ con $|\lambda| = \|T\|$.
Como T es compacto, entonces $(Tf_n)_n$ tiene una subsuciónconvergente $(Tf_{n_k})_k$, sea $g = \lim_k Tf_{n_k} \in H$.
Afirmación: g es vector propio de T con valor propio λ

$$0 \leq \left\|Tf_{n_j} - \lambda f_{n_k}\right\|^2 = \langle Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}, Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\rangle = \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \|f_{n_k}\|^2 \leq$$

$$\overset{\|f_{n_k}\| \leq 1}{\leq} \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \overset{\|T\| = |\lambda|}{=} 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle$$

El último término verifica

$$2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_K}\rangle \overset{k\to\infty}{\to} 2\lambda^2 - 2\lambda^2 = 0$$

Y entonces, tomando límites en toda la cadena de desigualdades, tenemos

$$0 \leq \left\|g - \lim_k \lambda f_{n_k}\right\|^2 \leq 0$$

por lo tanto, sabíamos que $Tf_{n_k} \to g$ y hemos obtenido que $\lambda f_{n_k} \to g$, de forma que

$$T(g) = T(\lim \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim f_{n_k}) = \lambda \lim T(f_{n_k}) = \lambda g$$

□

Proposition 7.25. *Sea*

$$S = \overline{span\{v : v \text{ vector propio de } T\}} \subset H$$

que hemos visto que no es 0. Se verifica que, si $kerT = \{0\}$, entonces $S = H$.

Proof. Supongamos lo contrario, o sea, que $S \subsetneq H$, de forma que S es un subespacio cerrado de H y podemos aplicar el teorema de la proyección, obteniendo que $H = S \oplus S^{\perp}$, con $S^{\perp} \neq 0$ porque suponemos que $kerT \neq 0$. Se tiene claramente que $T(S) \subset S$, pues $T(v) \in span(v)$. Vamos a ver que $Tg \in S^{\perp}$ para $g \in S^{\perp}$: sea $f \in S$,

$$\langle Tg, f \rangle = \langle Tf, g \rangle = 0$$

pues $Tf \in S, g \in S^{\perp}$, y entonces $Tg \in S^{\perp}$.Pero entonces, aplicando la proposición anterior, tenemos que $T_{|S^{perp}}$ tiene a $\pm \left\| T_{|S^{\perp}} \right\|$ como valor propio y un vector propio g_0, pero esto es una contradicción, pues

$$Tg_0 = T_{|S^{\perp}} g_0 = \lambda g_0 \implies g_0 \in S$$

y entonces debe ser $S = H$. ☐

Por tanto, tenemos que si T es inyectiva, entonces $S = H$, luego H tiene una base hilbertiana de vectores propios de T. Solo resta ver que $\lim_k |\lambda_k| = 0$:

Proposition 7.26. *Si $Tv_k = \lambda_k v_k$ con $(v_k)_k$ una base hilbertiana, entonces* $\lim_k \lambda_k = 0$.

Proof. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\lambda_{k_1}, ..., \lambda_k, ...$ verifican $|\lambda k_i| \geq \varepsilon, \forall i$. Entonces

$$\left\| \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j} \right\|^2 = \left\langle \lambda_{k_i} v_{k_I} - \lambda_{k_j} v_{k_j}, \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j} \right\rangle = \lambda_{k_i}^2 \left\| v_{k_i} \right\|^2 - 2\lambda_{k_i} \lambda_{k_J} \left\langle v_{k_i}, v_{k_j} \right\rangle + \lambda_{k_j}^2 \left\| v_{k_j} \right\| =$$

$$\overset{(v_k)_k \text{ ortonormal}}{=} \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_J}^2 > 2\varepsilon^2$$

Por tanto

$$\left\| \lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j} \right\| > \varepsilon\sqrt{2}$$

por lo que ninguna subsucesión de $(Tv_{k_i})_i$ puede ser de Cauchy y por tanto esa sucesión no tiene subsucesiones convergentes, pero esto es una contradicción, pues T es compacto. ☐

Así, tenemos todos los resultados y termina la demostración. ☐

Remark 7.27. Para el desarrollo de la prueba, es suficiente con que el operador sea **normal**: $T^*T = TT^*$.

Remark 7.28. Sea $T : H \to H$ con $kerT = 0$, entonces obtenemos un valor propio $\lambda_1 \in \{\|T\|, -\|T\|\}$ y hacemos

$$H = (ker(T - \lambda_1 Id)) \oplus (ker(T - \lambda_1 Id))^{\perp}$$

Definimos ahora

$$T_1 = T_{|ker(T-\lambda_1 Id)^{\perp}}$$

y aquí obtenemos $\lambda_2 \in \{\|T_1\|, -\|T_1\|\}$, volvemos a dividir el espacio,... y repetimos este proceso iterativamente para obtener todos los valores propios de T.

7.1 Alternativa de Fredholm

Sean $T : H \to H$ compacto y autoadjunto, $b \in H$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.
Queremos resolver

$$(P) \qquad \lambda u - Tu = b, \;\; u \in H$$

Podemos definir el problema homogéneo:

$$(P_{homogéneo}) = (P_h) \qquad \lambda u - Tu = 0, \;\; u \in H$$

Y se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema de Alternativa de Fredholm enunciado del profesor Orihuela

Theorem 7.29.

$$(P) \;\; \textit{tiene solución} \iff \langle b, v\rangle = 0, \;\; \forall v \;\; \textit{solución de} \;\; (P_h)$$

Proof. Como T es compacto y autoadjunto, por el teorema de Hilbert.Schmidt (7) tenemos que existe una base hilbertiana de vectores propios $(u_n)_n$ con $Tu_n = \lambda_n u_n, \forall n$ y $|\lambda_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Así, podemos escribir

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n$$

Veamos que si $\lambda \neq \lambda_n, \forall n$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, el operador $(\lambda Id - T)^{-1} : H \to H$ se puede definir y es continuo. O sea, dado $b \in H$, debemos enconrar $u \in H$ tal que

$$\lambda u - Tu = b$$

Si u es solución de (P), entonces $u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1}(b + \sum_n \lambda_n \langle u, u_n\rangle u_n)$.
Teniendo en cuenta que

$$(\lambda - \lambda_n)\langle u, u_n\rangle \overset{*}{=} \langle(\lambda I - T)u, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$$

donde $*$ se debe a que

$$\lambda_n \langle u, u_n\rangle = \langle u, \lambda_n u_n\rangle = \langle u, Tu_n\rangle = \langle Tu, u_n\rangle$$

Luego si u es solución P, entonces debe poder escribirse como

$$u = \lambda^{-1}\left(b + \sum_n \lambda_n \frac{\langle b, u_n\rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n\right)$$

Llamemos $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$ y estudiemos la serie

$$\sum_n \alpha_n \langle b, u_n\rangle u_n$$

Por la desigualdad de Bessel, es

$$\sum_n |\langle b, u_n\rangle|^2 = \|b\|^2$$

y como $\lim \lambda_n = 0$, entonces $\exists k : |\alpha_n| \leq k, \forall n$. Por tanto

$$\sum_n |\alpha_n \langle b, u_n\rangle|^2 \leq k^2 \|b\|^2$$

y la serie $\sum_n \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n$ es convergente en H, y el vector $u = \lambda^{-1} \left(b + \sum_n \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n \right)$ está bien definido, y tenemos

$$Tu = \lambda^{-1} \left(Tb + \sum_n \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n \right) = \lambda^{-1} \left(\sum_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n + \sum_n \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n \right) =$$

$$= \sum_n \lambda^{-1} \lambda_n (1 + \alpha_n) \langle b, u_n \rangle u_n$$

Y veamos que $\lambda u - Tu = b$.

$$\lambda u = b + \sum_n \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n$$

luego

$$\lambda u - Tu = b + \sum_n \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n - \sum_n \lambda^{-1} \lambda_n \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right) \langle b, u_n \rangle u_n =$$

$$= b + \sum_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} - \lambda^{-1} \lambda_n - \frac{\lambda^{-1} \lambda_n^2}{\lambda - \lambda_n} \right] \langle b, u_n \rangle u_n =$$

$$= b + \sum_n \left[\frac{\cancel{\lambda_n - \lambda_n} + \cancel{\lambda^{-1} \lambda_n^2 - \lambda^{-1} \lambda_n^2}}{\lambda - \lambda_n} \right] \langle b, u_n \rangle u_n = b$$

Además, la fórmula para u define un operador lineal

$$\begin{array}{rccc} (\lambda I - T)^{-1} : & H & \to & H \\ & b & \mapsto & \lambda^{-1} \left(b + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, u_n \rangle u_n \right) \end{array}$$

es un operador lineal y continuo:

$$\|u\| = \left\| (\lambda I - T)^{-1} b \right\| \leq |\lambda|^{-1} (\|b\| + k \|b\|) = |\lambda|^{-1} (1 + k) \|b\| = k \|b\|$$

y entonces $(\lambda Id - T)^{-1}$ es continuo.
Ahora, veamos que ocurre cuando λ es un valor propio. Podemos suponer que $\lambda = \lambda_1 = ... = \lambda_N$, para cierto $N \geq 1$ y $\lambda_n \neq \lambda_1, \forall n > N$.
Como

$$\langle b, u_n \rangle = (\lambda - \lambda_n) \langle u, u_n \rangle$$

entonces, si u es solución de (P) deve ser $\langle b, u_n \rangle = 0, \forall n = 1, ..., N$ y entonces $\langle b, v \rangle = 0, \forall v \in span\{u_1, ..., u_N\} = ker(\lambda I - T)$.
Recíprocamente, si $\langle b, u_n \rangle = 0, \forall n = 1, ..., N$, podemos definir

$$u = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \langle b, u_n \rangle u_n \right)$$

con α_n definido como antes, y de la misma forma se ve que u es solución de (P).
Finalmente, si T tiene una cantidad finita de valores propios no nulos, entonces todas las series anteriores se reducen a sumas finitas, pero la prueba es igual. □

Corollary 7.30. *Dado $b \in H, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$. Si suponemos que (P) tiene, a lo más, una solución, entonces existe el operador lineal y continuo $(\lambda I - T)^{-1} : H \to H$.*
Además, (P) tiene como única solución a

$$u = (\lambda I - T)^{-1} (b)$$

Proof. Si (P) tiene, a lo más, una solución, entonces

$$[\lambda u - Tu = \lambda v - Tv \implies u = v] \implies [\lambda w - Tw = 0 \implies w = 0]$$

y entonces estamos en el caso en el que $\lambda \neq \lambda_n, \forall n$, por lo que $\forall b \in H$, el problema tiene la solución $(\lambda I - T)^{-1}(b)$. □

En el libro este desarrollo es algo distinto. Vamos a verlo:
Queremos estudiar la resolución de las llamadas **ecuaciones integrales de Fredholm**, que son ecuaciones del tipo

$$f(t) - \mu \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds = g(t)$$

donde $f, g \in L^2([a,b])$ y $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$.

Teorema de Alternativa de Fredholm enunciado del libro

Theorem 7.31. *Sea $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ un núcleo que satisface $k(s,t) = \overline{k(s,t)}$ para casi todo $s,t \in [a,b]$ (es un **núcleo simétrico**). Sea K el operador integral asociado, dado por la fórmula*

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s) f(s)$$

Supongamos que

$$Kx = \sum_{j \in J} \mu_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

donde J es un conjunto contable y $\{e_n : n \in J\}$ es una base hilbertiana de $\overline{ImK}$.
Se considera la ecuación integral de Fredholm siguiente:

$$f(t) - \mu \int_a^b k(t,s) f(s)\, ds = g(t)$$

con $t \in [a,b], g \in L^2([a,b])$. Entonces:

1. *Si $\mu = 0$, entonces la ecuación tiene una única solución $f = g$*
2. *Si $\frac{1}{\mu} \neq \mu_n, \forall n$, entonces para cada $g \in L^2([a,b])$, existe una única solución de la ecuación, que viene dada por*

$$f(t) = g(t) + \mu \left(\sum_j \frac{\mu_j}{1 - \mu\mu_j} \left(\int_a^b g(s) \overline{e_j(s)} ds \right) e_j(t) \right)$$

   para $t \in [a,b]$. En este caso $\|f\|_2 \leq \alpha \|g\|_2$ para cierta constante α independiente de $g \in L^2([a,b])$
3. *Si $\frac{1}{\mu} = \mu_n$ para algún n, entonces la ecuación tiene solución si, y solo si, $g \in ker(\mu I - K)^{\perp}$,y en ese caso cualquier solución de la ecuación es de la forma*

$$f(t) = g(t) + \mu \sum_{\mu_j \neq \frac{1}{\mu}} \frac{\mu_j}{1 - \mu\mu_j} \left(\int_a^b g(s) \overline{e_j(s)} ds \right) e_j(t) + u(t)$$

   para $t \in [a,b]$, donde u es una función arbitraria de $ker(\mu_n I - K)$

La convergencia de las series anteriores es en media cuadrática. En la práctica, la convergencia suele ser más fuerte. El teorema que sigue garantiza convergencia uniforme bajo ciertas condiciones.

Theorem 7.32. ***Hilbert-Schmidt***
Sea $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ un núcleo simétrico tal que

$$\sup_{t \in [a,b]} \int_a^b |k(t,s)|^2 \, ds < \infty$$

Sean $(\mu_n)_n$ y $(e_n)_n$ como en el teorema anterior. Entonces, para cada $f \in L^2([a,b])$ se tiene

$$\int_a^b k(t,s) f(s) \, ds = \sum_{j \in J} \lambda_j \left(\int_a^b f(s) \overline{e_j(s)} ds \right) e_j(t)$$

para casi todo $t \in [a,b]$.
En caso de ser J numerable, la serie es absoluta y uniformemente convergente en $[a,b]$.

Corollary 7.33. *Sea $k \in C([a,b] \times [a,b])$ un núcleo simétrico. Entonces existen un conjunto contable J, un conjunto ortonormal $(e_j)_{j \in J}$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ y un conjunto de escalares $(\mu_j)_{j \in J}$ tales que*

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s) f(s) \, ds = \sum_{j \in J} \mu_j \left(\int_a^b f(s) \overline{e_j(s)} ds \right) e_j(t)$$

para $t \in [a,b]$, siendo la serie absoluta y uniformemente convergente en $[a,b]$.

7.2 Aplicaciones del resultado de alternativa de Fredholm

Las aplicaciones de este resultado serán el estudio de las ecuaciones integrales

$$\lambda f(s) - \int_a^b k(s,t) f(t) \, dt = g(s)$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}, k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}, g \in L^2([a,b])$.

7.2.1 Análisis espectral del operador de Laplace

TODO .... esto de momento NO

8 Ejercicios

1. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie absolutamente convergente en H. Demuestre que existe $A \in L(H)$ tal que $A(e_n) = f_n$, siendo (e_n) una base ortonormal de H.
Dado $x = \sum_n x_n e_n$ con $x_n = \langle x, e_n \rangle$, definimos

$$A(x) = \sum_n x_n f_n$$

siempre que esta serie sea convergente, claro. Veamos que lo es. Sea $M = \sum_n \|f_n\|$, entonces

$$\left\|\sum_n x_n f_n\right\| \leq \sup_n |x_n| \sum_n \|f_n\| \leq M \left\|\sum_n x_n e_n\right\|$$

por lo que A está bien definido, y además así probamos que $\|A\| \leq M$, luego A es continuo pues es lineal.

Test de Schur
Sea $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matriz infinita con $a_{ij} \in \mathbb{K}$. La condición de Schur es la siguiente:
Existe constantes C_1 y C_2 tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq C_1, \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq C_2, \forall j$$

3. Pruebe mediante ejemplos que existen matrices $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ tales que $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$ y que no verifican las condiciones del test de Schur y que hay matrices del mismo tipo que satisfacen la condición de Schur y sin embargo $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \infty$.
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & ... \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Es

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Pero

$$\sum_i |a_{i1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

luego no satisface la condición de Schur.
La matriz

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

cada fila y cada columna suma 1, pero la suma de todo al cuadrado es divergente.
6. Sean E un espacio de Banach y $T \in L(E)$.Probar que si $\|T^m\| < 1$ para algún m positivo, entonces $I - T$ es invertible.
Si vemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es convergente, entonces

$$(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = I$$

Y por el otro lado igual.

Ahora, dado $n \in \mathbb{N}$, se puede escribir $n = pm + r$ con $0 \leq r < m$ y entonces

$$\|T^n\| = \|T^{pm}T^r\| \leq \|T^m\|^p \|T\|^r \leq \|T^m\|^p C$$

Y la serie $\sum_{p\geq 0} \|T^m\|^p$ es convergente por ser $\|T^m\| < 1$, luego tenemos la convergencia de la serie y el ejercicio.
7. Sea $S_r : \ell^2 \to \ell^2$ el operador desplazamiento por la derecha, definido por

$$S_r\left((x_n)\right) = (0, x_1, x_2, ...)$$

Sean $\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : S_r - \lambda I\}$ no es invertible y $\sigma_p(S_r)$ el conjunto de autovalores de S_r.
Establézcase que $\sigma_p(S_r) = \emptyset$ y que $0 \in \sigma(S_r)$.
Supongamos que existe $\overline{S_r}$ el operador inverso de S_r. Dado $x = (x_n)_n \in \ell^2$ se tiene que

$$S_r\overline{S_r}(x) = x$$

$$\overline{S_r}S_r(x) = x$$

En particular

$$x_n = \left(S_r\overline{S_r}(x)\right)_n = \left(\overline{S_r}(x)\right)_{n-1}, n \geq 2$$

por lo que

$$\overline{S_r}\left((x_n)_n\right) = (x_2, x_3, ...)$$

Pero entonces

$$S_r\overline{S_r}\left((x_n)_n\right) = S_r\left((x_2, x_3, ...)\right) = (0, x_2, x_3, ...)$$

que no es igual a x en general.
Por tanto, S_r no es invertible, y debe ser $0 \in \sigma(S_r)$.
Vamos a ver que el conjunto de autovalores es vacío.
Supongamos que $\lambda \neq 0$ es un valor propio, y sea x un vector propio no nulo. Debería ser

$$S_r(x) = \lambda x$$

Entonces, debe ser

$$\lambda x_1 = 0$$

por lo que $x_1 = 0$. Pero, además, debe ser

$$\lambda x_n = x_{n+1}, \forall n \geq 1$$

luego

$$x_n = \lambda^{n-1}x_1 = 0$$

y entonces $x = 0$ # Contradicción.
Si el valor propio fuese el 0, entonces existiría un x no nulo cuya imagen fuese el 0, pero por la definición de S_r es obvio que esto no puede suceder.
10. Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $(e_n)_n$ una base hilbertiana de H. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto.

1. Probar que K contiene un subconjunto denso numerable $(k_n)_n$

   Dado $n \in \mathbb{N}$, tomamos el recubrimiento abierto

$$\left\{B\left(k, \frac{1}{n}\right) : k \in K\right\}$$

como K es compacto, entonces existe un subcubrimiento finito

$$\left\{B\left(k_{n,j},\frac{1}{n}\right):j=1,...,m_n\right\}$$

Y entonces, el conjunto

$$A=\{k_{n,j}:n\in\mathbb{N},j=1,...,m_n\}$$

es denso y numerable en K. Que es numerable es obvio. Para ver que es denso, basta darse cuenta de que para todo $\varepsilon>0$ y para todo $y\in K$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$ y existe $j\in\{1,...,m_n\}$ con $\|y-k_{n,j}\|<\frac{1}{n}<\varepsilon$.

2. Probar que existe un único operador $T\in L(H)$ de modo que $T(e_n)=k_ne_n$

   Definimos T para que verifique esta condición

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\langle x,e_n\rangle e_n$$

   para $x=\sum_n\langle x,e_n\rangle e_n$. Esta está bien definida por la unicidad de la expresión de x respecto a una base hilbertiana.

   La linealidad es obvia, y respecto a la continuidad:

$$\|Tx\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|k_n|^2|\langle x,e_n\rangle|^2\leq\sum_n\sup_m|k_m|^2|\langle x,e_n\rangle|^2=\sup_n|k_n|^2\|x\|^2$$

   por lo que

$$\|T\|=\sup_n|k_n|^2$$

   que es finito porque K es acotado.

   Dado que $(e_n)_n$ es una base hilbertiana, cualquier aplicación lineal continua está determinada por sus valores en los vectores de la base. Por tanto, esta aplicación T es la única que verifica la condición del enunciado.

3. Probar que el espectro puntual de T coincide con $(k_n)_n$ y que el espectro de T es K

   Se tiene que $\{k_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\sigma_p(T)$, pues $e_n\in Nuc(k_nI-T)$.

   Por otro lado, si $\lambda\in\sigma_p(T)$, entonces $\exists x\neq 0$ tal que $Tx=\lambda x$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n\langle x,e_n\rangle e_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\langle x,e_n\rangle e_n\implies k_n\langle x,e_n\rangle=\lambda\langle x,e_n\rangle,\forall n$$

   pero siendo $x\neq 0$, entonces $\exists m\in\mathbb{N}$ con $\langle x,e_m\rangle\neq 0$ y entonces $\lambda=k_m$. O sea, que $\sigma_p(T)\subset\{k_n\}_n$ y tenemos el primer resultado.

   Veamos ahora que $K=\sigma(T)$:

   [$\subset$] Como $\{k_n\}_n=\sigma_p(T)\subset\sigma(T)$ y este último es compacto, entonces $K\subset\sigma(T)$.

   [$\supset$] Si $\lambda\notin K$, entonces $\lambda I-T$ es invertible:

$$(\lambda I-T)x=\sum_n(\lambda-k_n)\langle x,e_n\rangle e_n$$

y como $|\lambda - k_n| > \varepsilon$ para algún ε (porque la distancia a un compacto de un punto de fuera es positiva), entonces

$$Sx = \sum_n \frac{1}{\lambda - k_n} \langle x, e_n \rangle e_n$$

define un operador acotado, que es el inverso de $\lambda I - T$. Por tanto $\lambda \notin K \implies \lambda \notin \sigma(T)$, y entonces $\sigma(T) \subset K$.

4. Si $k \in K$ y es diferente de todos los $(k_n)_n$, pruebe que la imagen de $kI - T$ es un subconjunto denso propio de H

   Queremos ver que dado $\varepsilon > 0$,para todo $y = \sum \langle y, e_n \rangle e_n \in H$, existe $x = \sum_n x_n e_n \in H$ tal que $\|(kI - T)x - y\| < \varepsilon$.

   Para obtener x, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

   y definimos

$$x_n = \frac{\langle y, e_n \rangle}{k - k_n}, n = 1, 2, ..., m$$
$$x_n = 0, n > m$$

   Entonces

$$(kI - T)x = kx - Tx = \sum_n (k - k_n) \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{m} \langle y, e_n \rangle e_n$$

   por tanto

$$\|(kI - T)x - y\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n \right\| < \varepsilon$$

   Por tanto, $Im(kI - T)$ es denso en H. Falta ver que es propio. Supongamos que $kI - T$ es sobreyectiva: para cada $y \in H, \exists x \in H$ con

$$\sum_n (k - k_n) \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_n \langle y, e_n \rangle e_n$$

   por lo que

$$(k - k_n) \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle, \forall n$$

   Por la densidad de $(k_n)_n$ en K, existe $\left(k_{n_j}\right)_j$ con $\left|k - k_{n_j}\right| < \frac{1}{j}$. Definimos el vector y que satisface

$$\langle y, e_n \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq n_j \\ \frac{1}{j} & n = n_j \end{cases}$$

   Se tiene que $y \in H$, pero tuviera una preimagen por $kI - T$, debería ser

$$\left(k - k_{n_j}\right) \left\langle x, e_{n_j} \right\rangle = \frac{1}{j}$$

   y entonces

$$\left|\left\langle x, e_{n_j} \right\rangle\right| = \frac{1}{j\left|k - k_{n_j}\right|} > 1$$

   Pero esto no puede ser, pues se satisface

$$\sum_n \left|\left\langle x, e_{n_j} \right\rangle\right|^2 < \infty$$

11. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in L(H)$ y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Se dice que M es invariante por T si $T(M) \subset M$.

1. Probar que M es invariante por T si, y solo si, $M^{\perp}$ es invariante por T^*

   Como $M^{\perp\perp} = M$ por ser M cerrado y $T^{**} = T$, entonces basta ver la condición necesaria.

   Así, supongamos que M es invariante por T, o sea, $T(M) \subset M$. Queremos ver que $T^*\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp}$, para ello, sea $y \in M^{\perp}$, entonces, para todo $x \in M$, se tiene

   $$0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

   por lo que $T^* y \in M^{\perp}$ y tenemos el resultado.

2. Probar que M es invariante por T si, y solo si, $TP = PTP$ donde P es la proyección ortogonal de H sobre M

   [$\Longrightarrow$] Si $T(M) \subset M$, entonces $P(T(M)) = T(M)$, y por tanto

   $$PTP = TP$$

   [$\Longleftarrow$] Si $TP = PTP$, supongamos, por reducción al absurdo, que M no es invariante por T. O sea, que existe $x \in M$, tal que $Tx \notin M$, entonces, aplicando el teorema de la proyección, podemos escribir

   $$Tx = (Tx)_M + (Tx)_{M^{\perp}}$$

   y es

   $$TP(x) = Tx \notin M$$

   y

   $$PTP(x) = P(Tx) = (Tx)_M \in M$$

   y esto es una contradicción, pues por hipótesis debería ser $Tx = (Tx)_M$, pero uno está en M y el otro no $\#$ Por tanto, M debe ser invariante por T.

20. Sean $H_n, n \in \mathbb{N}$ espacios de Hilbert. Sean $T_n \in L(H_n)$, con $\sup_n \|T_n\| < \infty$ y $T = \bigoplus_n T_n$ definida en $\bigoplus_n H_n$ de forma natural. Probar que T es una aplicación lineal compacta si, y solo si, cada T_n es compacta y $\lim_n \|T_n\| = 0$.
Si $x \in \bigoplus_n H_n$, entonces $x = \sum_n x_n$, con $x_n \in H_n$ unívocamente determinados, y con $\sum_n \|x\|^2 < \infty$. La definición natural de T debe ser

$$Tx = \sum_n T_n x_n$$

y para estar bien definido debe ser

$$\sum_n \|T_n x_n\|^2 < \infty$$

lo cual se verifica porque

$$\sum_n \|T_n x_n\|^2 \leq \sum_n \|T_n\|^2 \|x_n\|^2 \leq \left(\sum_n \|T_n\|^2\right)\left(\sum_n \|x_n\|^2\right) < \infty$$

por ser producto de dos números finitos.
Es obvio que T es lineal. Vamos al ejercicio:

$[\Longleftarrow]$ Tenemos que T_n es compacta $\forall n$ y $\lim_n \|T_n\| = 0$. Entonces, sea P_n la proyección ortogonal de $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k$ sobre $\bigoplus_{k=1}^{n} H_k$. Entonces

$$\|(T - P_nT)\, x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|T_k x_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup\{\|T_k\| : k \geq n+1\} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup\{\|T_k\| : k \geq n+1\}\, \|x\|$$

Cada P_nT es compacto, pues es suma finita de operadores compactos

$$P_nT = \sum_{k=1}^{n} T_n$$

Ahora, con la acotación anterior, y dado que el límite de la norma de los T_n es 0, tenemos que $\lim_n \|(T - P_nT)\, x\| = 0, \forall x$, por lo que el teorema 7.19 nos da el resultado.

23. Probar que no existen operadores compactos invertibles en espacios normados de dimensión infinita.

Si T fuese un operador compacto invertible, entonces $TT^{-1} = I$ sería un operador compacto por el mismo teorema que el ejercicio anterior (7.19), pero esto no es cierto, pues la bola sabemos que no es compacta (solo lo es en la topología débil).

24. Probar que un operador acotado idempotente ($TT = T$) es compacto si, y solo si, es de rango finito.

$[\Longleftarrow]$ Los operadores de rango finito son compactos porque la imagen de la bola unidad es un cerrado y acotado en la topología inducida.

$[\Longrightarrow]$ Supongamos que ImT tiene dimensión infinita. Como $TT = T$, entonces ImT es invariante por T: $T\,(ImT) \subset ImT$.

Además, ImT es un subespacio cerrado, ya que si $x = \lim_n x_n$ con $x_n \in ImT$ entonces $Tx = \lim_n Tx_n = \lim_n T\,(Ty_n) = \lim_n Ty_n = \lim x_n = x$, luego el límite está en el conjunto y este es cerrado.

Sea ahora $(e_n)_n$ una sucesión ortonormal en ImT, que existe por tener este dimensión infinita. Se tiene que $Te_n = T\,(Tu_n) = Tu_n = e_n, \forall n$. Por la compacidad de T, $(Te_n)_n = (e_n)_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero esto no es posible pues

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}, \forall i \neq j$$

28. Sea $(a_n)_n$ una sucesión absolutamente sumable. Probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... \\ a_2 & a_3 & ... & ... \\ a_3 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

define un operador lineal compacto en ℓ^2. Si se supone además que $(|a_n|)_n$ es una sucesión monótona, demuestre que el operador es de Hilbert-Schmidt.

Se cumple el test de Schur por la condición de ser absolutamente sumable.

Vamos a ver que se puede aproximar por operadores de rango finito-dimensional.

Sean (A_{ij}) los coeficientes de A. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$ y consideremos el operador B definido por $B_{ij} = A_{ij}$ si $i, j < n$ y $B_{ij} = 0$ en otro caso. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ij} - B_{ij}| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$$

Como las matrices son simétricas, entonces esto funciona en j y se verifica el criterio de Schur. TODO

Part III

Los principios fundamentales del Análisis Funcional

9 El teorema de Hanh-Banach

Definition 9.1. Un **espacio vectorial topológico** es un espacio vectorial con una topología en la que el producto por escalares y la suma de vectores son aplicaciones continuas.

Teorema de Hahn-Banach (versión geométrica)

Theorem 9.2. *Dado X espacio de Banach, $A \subset X$ convexo y cerrado, $x_0 \notin A$. Entonces existe $f \in X^*$ y $H = \{x \in E : f(x) = \lambda\}$ que separa A de x_0 (un hiperplano de separación).*

Teorema de Hahn-Banach (versión analítica en un espacio de Hilbert)

Theorem 9.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $F \subset H$ un subespacio cerrado. Sea $f : F \to \mathbb{K}$ lineal y continua, entonces existe una única $\tilde{f} : H \to \mathbb{K}$ lineal y continua que sea extensión de f.*

Proof. F cerrado en un Hilbert, por lo que es Hilbert. Entonces, por el teorema de Riesz, $\exists v_f \in F$ tal que

$$f(x) = \langle x, v_f \rangle, \ \forall x \in F, \qquad \|v_f\| = \|f\|$$

Definiendo

$$\tilde{f}(x) = \langle x, v_f \rangle, \ x \in H$$

tenemos el resultado. □

Teorema de Hahn-Banach (versión geométrica en un espacio de Hilbert real)

Theorem 9.4. *Sea H espacio de Hilbert real, $C \subset H$ convexo cerrado y $x_0 \notin C$. Entonces $\exists f : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que*

$$f(x_0) > \alpha > f(c)$$

para todo $c \in C$.

Proof. El problema 1.52 del libro dice que $y \in C$ cumple que $\|x_0 - y\| = dist(x_0, C)$ si, y solo si, $Re(\langle x_0 - y, w - y \rangle) \leq 0$ para cada $w \in C$. En el caso real no es necesario tomar la parte real. Tomamos y_0 al vector que cumple esto y definimos

$$f : H \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \langle x, x_0 - y_0 \rangle$$

verifica las condiciones del enunciado. □

Lemma 9.5. *Sea X un espacio vectorial real y $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional subaditivo y positivamente homogéneo ($p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall \lambda > 0, x \in X$).*

Sea Y subespacio de X de codimensión 1, y sea $f: Y \to \mathbb{R}$ lineal tal que

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in Y$$

Entonces podemos extender f a $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \ \forall x \in X$$

Proof.

$$X = Y \oplus span\{x_0\}$$

Solo hace falta definir $f(x_0)$ de forma que se mantenga la acotación. Cualquier extensión será de la forma

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0)$$

y debe cumplirse

$$\sup_{w \in Y} \{f(w) - p(w - x_0)\} \leq \tilde{f}(x_0) \leq \inf_{z \in Y} \{-f(z) + p(z + z_0)\}$$

Hace falta comprobar que el intervalo no es vacío. Observamos que:

$$f(z) + f(w) = f(z + w) \leq p(z + w) = p(z + x_0 + w - x_0) \leq p(z + x_0) + p(w - x_0), \ \forall z, w \in Y$$

de donde

$$f(w) - p(w - x_0) \leq -f(z) + p(z + x_0), \ \forall w, z \in Y$$

de donde el intervalo de los posibles valores $\tilde{f}(x_0)$ es no vacío. Definimos entonces $\tilde{f}(x_0)$ en ese intervalo. Queda solo ver que

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0), \ \forall y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}$$

Basta trabajar por casos en el signo de α y sale. □

Corollary 9.6. *Si p es una seminorma, entonces*

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x), \ \forall x \in X$$

Remark 9.7. Si p es una norma, esa condición se traduce en la acotación, y por tanto en la continuidad de la aplicación.

Teorema de Hahn-Banach (versión analítica)

Theorem 9.8. *Sea X un espacio de Banach, Y subespacio cerrado de X, y $X = \overline{span\{(x_n)_n\}}$. Consideremos $f: Y \to \mathbb{R}$ lineal y continua, entonces*

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|x\| \|f\|$$

Proof. Si $Y_0 := Y, \ f_0 := f$, entonces definimos

$$Y_n := Y_{n-1} \oplus span\{x_n\}$$

de forma que, por el lema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede extender f_{n-1} a $f_n: Y_n \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \|f_{n-1}\| \|x\| = ... = \|f\| \|x\|$$

Y definimos, finalmente

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \tilde{f}(z) = f_n(z), \ si \ z \in Y_n \end{array}$$

Esta función verifica

$$\left|\tilde{f}(z)\right| \leq \|f\| \|z\|, \ \forall z \in Z$$

Además, es una forma lineal continua, por lo que es uniformemente continua. Y como Z es denso en X, entonces podemos extender $\tilde{f}$ a X manteniendo las propiedades que buscamos. □

Vamos ahora a trabajar en un espacio vectorial E general.

Definition 9.9. Cuando $\forall x \in E$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A, \forall \lambda > \lambda_0$, se dice que A es **absorbente**.
Dado A absorbente con 0 en el interior de A, definimos

$$P_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

Esta aplicación se denomina **funcional de Minkowski**.

Proposition 9.10. *Se verifica:*

1. $P_A \geq 0$ *y positivamente homogéneo*
2. *Si* A *es coovexo,* P_A *es subaditiva*
3. $\{x : P_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x : P_A(x) \leq 1\}$

Teorema de Mazur

Theorem 9.11. *Sea* $E[\tau]$ *un espacio vectorial topológico,* $M \subset E$ *una variedad afín y* $A \subset E$ *no vacío, abierto y convexo.*
Si $A \cap M = \emptyset$*, entonces existe un hiperplano afín cerrado* H *en* $E[\tau]$ *tal que*

$$A \cap H = \emptyset$$

$$M \subset H$$

Proof. Es $M = x_0 + F$ con $F \subset E$ espacio vectorial. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in A$, pues se puede trasladar el problema de no ser así.
Como A es abierto, A es absorbente, y se tiene

$$A = \{x \in E : P_A(x) < 1\}$$

Aplicando que $A \cap M = \emptyset$, entonces es

$$P_A(x_0 + y) \geq 1, \ \forall y \in F$$

Defino

$$\begin{array}{rccc} u: & F \oplus span\{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (y, \lambda x_0) & \mapsto & u(y, \lambda x_0) = \lambda \end{array}$$

que es lineal y verifica

$$u(y, \lambda x_0) \leq P_A(y + \lambda x_0), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in F$$

pues:

- si $\lambda < 0$, entonces $u(y, \lambda x_0) = \lambda \leq 0 \leq P_A(y + \lambda x_0)$
- si $\lambda > 0$, entonces $u(y, \lambda x_0) = \lambda \cdot 1 \leq \lambda P_A\left(\frac{1}{\lambda}y + x_0\right) = P_A(y + \lambda x_0)$

Aplicando a u el teorema de Hahn-Banach en su versión analítica, extendemos u a $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u}(x) \leq P_A(x)$ para cada $x \in E$.
Al ser A abierto, esta desigualdad implica que $\tilde{u}$ es continua, basta comprobar el límite en el 0. Deifniendo, entonces

$$H = \{x \in E : \tilde{u}(x) = 1\}$$

se tiene

$$M \subset H$$

$$A \cap H = \emptyset$$

donde esta última igualdad se da porque si $x \in H$, entonces $P_A(x) \geq \tilde{u}(x) = 1$, por lo que $x \notin A$ (3 de la proposición anterior). ☐

Corollary 9.12. ***Primer teorema de separación***
Sea $E[\tau]$ un espacio vectorial topológico, A y B subconjuntos convexos y abiertos con intersección vacía.
Entonces existe un hiperplano H real cerrado que separa estrictamente A y B.
Es decir, existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $H = \{x \in E : f(x) = \epsilon\}$ es un hiperplano y

$$A \subset \{x \in E : f(x) < \epsilon\} \qquad B \subset \{x \in E : f(x) > \epsilon\}$$

Proof. Tomamos $A - B$ (la diferencia algebraica, no de conjuntos), que es convexo, abierto, no vacío y $0 \notin A - B$. Entonces, por el teorema de Mazur, $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua con $0 \in H = \{x \in E : f(x) = 0\}$ y $H \cap (A - B) = \emptyset$, de donde $f(A - B)$ será un conexo no vacío en $\mathbb{R}$, o sea, un intervalo, con $0 \notin f(A - B)$, luego f separa estrictamente A y B. ☐

Corollary 9.13. ***Segundo teorema de separación***
Sea $E[\tau]$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, K y F subconjuntos convexos disjuntos de E, con K compacto y F cerrado.
Entonces existe un hiperplano real cerrado que separa estrictamente K y F.

Proof. Si K es compacto, entonces existe un entorno del origen convexo K (por ser el espacio localmente convexo) tal que

$$(K + W) \cap (F + W) = \emptyset$$

y basta aplicar el primer teorema de separación. ☐

Teorema de Hahn-Banach (versión geométrica)

Theorem 9.14. *Dados dos conjuntos A y B convexos y cerrados, existe $H = \{x \in E : f(x) = \lambda\}$ que separa A y B, donde $f : E \to \mathbb{R}$ es lineal y continua.*

10 Teorema de Baire

Definition 10.1. Un conjunto es **nunca-denso** si el interior de su clausura es vacío.
Los **conjuntos de primera categoría** son las uniones numerables de conjuntos nunca-dendos.
Los de **segunda categoría** son los que no son de primera.
Un espacio topológico es de **Baire** si la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es un conjunto denso.

Teorema de Bairer

Theorem 10.2. *Si (M, d) es un espacio métrico completo, entonces M es de Baire.*

Proof. Sea $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos. Para demostrar que $\bigcap_n G_n$ es denso, veamos que, para cualquier abierto $\emptyset \neq V \subset M$ se tiene

$$V \cap \left(\bigcap_n G_n \right) \neq \emptyset$$

Construimos inductivamente sucesiones $(x_n)_n \subset M$ y $(r_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ de forma que

$$B[x_n, r_n] \subset G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_n \cap G_{n-1} \cap ... \cap G_1 \cap V$$

y $r_n < \frac{1}{n}$.

- Como G_1 es denso en M, $\exists x_1 \in G_1 \cap V \neq \emptyset$ y por ser abierto $\exists r_1 \in (0, 1)$ con $B[x_1, r_1] \subset V \cap G_1$
- Como G_n es denso en M, $\exists x_n \in G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_n \cap G_{n-1} \cap ... \cap G_1 \cap V$

Ahora bien, $(x_n)_n$ es de Cauchy, pues para cada $m > n$, $x_m \in B(x_m, r_m) \subset B(x_{m-1}, r_{m-1}) \subset ... \subset B(x_n, r_n)$ y $r_n \to 0$.
Como el espacio es completo, existe $x = \lim_n x_n$ y debe ser $x \in B[x_n, r_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ por la serie de inclusiones que acabamos de ver.
Se tiene entonces, por construcción, que $x \in G_n \cap G_{n-1} \cap ... \cap G_1 \cap V$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y entonces $x \in V \cap (\bigcap_n G_n)$, como queríamos ver. $\square$

Corollary 10.3. *Si X es un espacio de Banach, entonces su dimensión algebraica o es finita o es no numerable.*

11 Teorema de la acotación uniforme o de Banach-Steinhaus

Theorem 11.1. ***Teorema de la acotación uniforme de Banach-Steinhaus***
Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas del espacio normado X en el espacio normado Y y sea

$$D = \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| = \infty \right\}$$

Entonces:

1. *Si D^c es de segunda categoría, entonces $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ y D es vacío*
2. *Si X es de Banach, entonces, o bien $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$ o bien D es un G_δ denso en X*

Teorema de Banach-Steinhaus (enunciado alternativo del profesor Orihuela)

Theorem 11.2. *Dada una familia de aplicaciones lineales y continuas $\{A_i\}_{i \in I}$ entre un espacio de Banach X y un espacio normado Y, si $\forall x \in X$ se tiene $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\| < \infty$, entonces $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$*

Proof. Consideremos los conjuntos

$$D = \left\{ x \in X : \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| = \infty \right\}$$

$$D_n = \bigcup_{i \in I} \{x \in X : \|A_i(x)\| > n\}$$

Los D_n son abiertos porque cada A_i y la norma son continuas, y $D = \bigcap_n D_n$.
Por hipótesis es $D = \emptyset$ y si cada D_n fuese denso, entonces también lo sería D (por el teorema de Baire, pues X es de Banach). Por tanto, algún D_n no es denso, y $\exists m \in \mathbb{N}$ con $Int\left(D_m^c\right) \neq \emptyset$.
Consideremos $x \in Int\left(D_m^c\right)$ y $r > 0$ con $B(x, r) \subset D_m^c$, de forma que $\forall y \in B(x, r)$ se tiene que $\|A_i y\| \leq m$ por la construcción de D_m^c.
Consideremos, además, $C = \sup_{i \in I} \|A_i x\| < \infty$. Entonces, para $y \in B(0, r)$:

$$\|A_i y\| = \|(A_i y - A_i x) + A_i x\| \leq \|A_i(x - y)\| + \|A_i x\| \leq m + C$$

y por lo tanto, $\forall y \in B[0, 1]$ y $\forall i \in I$ se da

$$\|A_i y\| \leq 2r(m + C)$$

por lo que

$$\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$$

□

12 Teorema de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada

Definition 12.1. Sea X un espacio normado y $A \subset X$.
Se dice que A es **CS-compacto** si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$ y cualquier sucesión $(\lambda_n)_n \subset [0,1]$ tal que $\sum_n \lambda_n = 1$ se verifica que la serie $\sum_n \lambda_n x_n$ converge a un punto de A.
Se dice que A es **CS-cerrado** si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$ y cualquier sucesión $(\lambda_n)_n \subset [0,1]$ tal que $\sum_n \lambda_n = 1$ y para la cual la serie $\sum_n \lambda_n x_n$ converge a un punto, se verifica que dicho punto está en A.

Proposition 12.2. *Sea X un espacio normado y $A \subset X$:*

- *Si X es de Banach, su bola unidad es CS-compacta*
- *Si A es cerrado y convexo, entonces A es CS-cerrado*
- *Si A es CS.compacto, entonces A es CS-cerrado y acotado. Si X es de Banach, entonces se verifica también el recíproco*

Proposition 12.3. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal y continua. Si $A \subset X$ es CS-compacto, entonces $T(A)$ es CS-compacto.*

Proposition 12.4. *Sea X espacio normado y $A \subset X$ CS-cerrado. Entonces A y $\overline{A}$ tienen el mismo interior.*

Teorema de la Aplicación Abierta

Theorem 12.5. *Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $T : X \to Y$ lineal y continua tal que $T(X)$ es de segunda categoría en Y.*
Entonces T es una aplicación sobreyectiva y abierta, siendo además Y un espacio de Banach.

Proof. Para ver que T es abierta y sobreyectiva basta ver que $rB_Y \subset T(B_X)$ para cierto $r > 0$.
Como B_X es CS-compacto (12.2), entonces $T(B_X)$ también lo es (12.3), y entonces $T(B_X)$ es CS-cerrado (12.2).
Como $T(X) = \bigcup_n nT(B_X)$ es de segunda categoría en Y, y las homotecias son homeomorfismos, entonces $\overline{T(B_X)}$ tiene interior no vacío, que coincide con el interior de $T(B_X)$ (12.4).
Podemos entonecs tomar $y_0 \in Y, r > 0$ tales que $B_Y(y_0, r) \subset T(B_X)$.
Por la simetría de las bolas, se verifica $B_Y(-y_0, r) \subset T(B_X)$, y por tanto

$$B_Y(0,r) \subset \frac{1}{2} B_Y(-y_0, r) + \frac{1}{2} B_Y(y_0, r) \subset \frac{1}{2} T(B_X) + \frac{1}{2} T(B_X) = T(B_X)$$

como queríamos ver.
Falta solo comprobar que Y es completo, para lo que es suficiente ver que si $(y_n)_n \subset Y$ y $\sum_n \|y_n\| < \infty$ entonces $\sum_n y_n$ converge.
Por las inclusiones anteriores, para cada n podemos tomar $x_n \in B_X$ con $Tx_n = \frac{r}{2} \frac{y_n}{\|y_n\|}$, por lo que haciendo

$$z_n = \frac{r}{2} \|y_n\| x_n$$

se da qye $Tz_n = y_n$ y $\|z_n\| \leq \frac{2}{r} \|y_n\|$, por lo que $\sum_n \|z_n\| < \infty$ y existe $z = \sum_n z_n$ por la completitud de X.
Finalmente, por la continuidad de T, $\sum_n y_n$ es convergente a $y = Tx$. $\square$

Una versión más particular del teorema:

Teorema de de la aplicación abierta (enunciado alternativo del profesor Orihuela)

Theorem 12.6. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y continua, entonces T es sobreyectiva si, y solo si, es abierta.*

Definition 12.7. Una aplicación $f : M_1 \to M_2$ donde M_1, M_2 son espacios topológicos de Hausdorff, se dice que **tiene gráfica cerrada** si su gráfica, $graf(f) = \{(t, f(t)) : t \in M_1\}$ es cerrada en el espacio producto $M_1 \times M_2$.

Teorema de la Gráfica Cerrada

Theorem 12.8. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal. Entonces T es continua si, y solo si, T tiene gráfica cerrada.*

Proof. Primero, como T es lineal, entonces $graf(T)$ es un espacio vectorial.
Segundo, consideramos P_1, P_2 las proyecciones canónicas en $X \times Y$, que son lineales y continuas en la topología producto.
Tercero, llamamos $\tilde{P}_i = P_{i|graf(T)}$, que es biyectiva.
[$\Longrightarrow$] Sea $((x_n, Tx_n))_n$ una sucesión en $graf(T)$ que converge a $(x, y) \in X \times Y$. Como las proyecciones son continuas, $x_n = P_1(x_n, Tx_n) \to P_1(x, y) = x$ y $Tx_n = P_2(x_n, Tx_n) \to P_2(x, y) = y$.
Como T es continua, $Tx = \lim_n Tx_n = y$, y entonces $(x, y) = (x, Tx) \in graf(T)$, por lo que $graf(T)$ es cerrado.
[$\Longleftarrow$] Por (primero) y como suponemos que $graf(T)$ es cerrado en un espacio de Banach, entonces también es un espacio de Banach.
Consideramos ahora la aplicación $S : X \to graf(T)$ que lleva $x \mapsto (x, Tx)$ y es claramente biyectiva, con inversa $\tilde{P}_1$. Como P_1 es lineal y continua, entonces $\tilde{P}_1$ también, y entonces por 12 es abierta y S es continua. Se tiene, pues que $T = P_2 \circ S$ también lo es, por ser composición de aplicaciones lineales y continuas. $\square$