Superficies de Willmore en el espacio euclídeo

Autor: Jose Antonio Lorencio Abril
Director: Luis J. Alías Linares

TFG presentado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia

Introducción

El funcional de Willmore de una superficie S es

$$W(S) = \int_S H^2 dS,$$

y las superficies de Willmore son aquellas que minimizan este funcional.
Las superficies de Willmore son un tema de gran actividad investigadora. En este trabajo se demuestran los resultados fundacionales de esta rama de la geometría, utilizando únicamente herramientas del grado en matemáticas y acercando, por tanto, el tema a los estudiantes interesados.

El funcional de Willmore

El **funcional de Willmore** de una superficie S orientable y compacta se define como

$$W(S) = \int_S H^2 dS,$$

y el primer resultado importante que podemos alcanzar es el siguiente teorema:

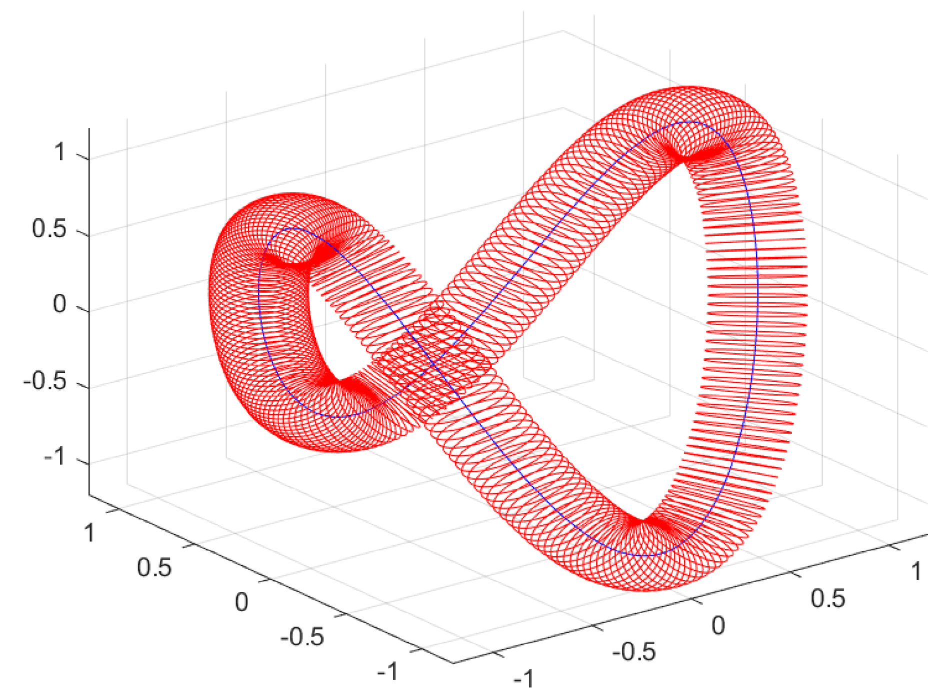
> **Teorema 1** *Dada una superficie orientable y compacta, S, entonces*
>
> $$W(S) \geq 4\pi,$$
>
> *y la igualdad se da si, y solo si, $S = \mathbb{S}^2$.*

Obtenemos, así, el mínimo de W entre todas las superficies: el dado en la esfera. Podemos restringirnos a las superficies de género 1, y obtener un primer resultado para la familia de los **toros de revolución**:

> **Teorema 2** *De entre los toros de revolución, $\mathbb{T}(r, R)$, $0 < r < R \in \mathbb{R}$, aquellos que minimizan el funcional de Willmore son los que verifican $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Además, el valor de este mínimo es $2\pi^2$.*

Más aún, si consideramos los **toros generalizados**, que son aquellas superficies definidas como un tubo alrededor de una curva regular cerrada, entonces llegamos a una conclusión similar:

> **Teorema 3** *El funcional de Willmore de cualquier toro generalizado es mayor o igual que el funcional de Willmore del toro de revolución con radios en proporción $\sqrt{2}$.*



La conjetura de Willmore

Tras los resultados obtenidos, Willmore se convence de que este mínimo no debe ser local a los toros, sino que debe ser el mínimo entre la familia de las superficies compactas de género 1, tal y como conjeturó en 1965:

> **Conjetura 1** ***Conjetura de Willmore (1965)***
> *Si S es una superficie orientable y compacta con género 1, $g(S) = 1$, entonces*
>
> $$W(S) \geq 2\pi^2,$$
>
> *y se da la igualdad si, y solo si, la superficie S es el toro de revolución $\mathbb{T}\left(r, \sqrt{2}r\right)$.*

Esta conjetura no se demostró hasta 2014, cuando Marques y Neves publicaron su demostración en un complejo artículo de casi 100 páginas.

Invarianza conforme del funcional de Willmore

Las aplicaciones conformes son aquellos difeomorfismos locales entre dos abiertos del espacio que conservan ángulos.
Si consideramos una aplicación conforme entre dos abiertos, y una superficie en el dominio, entonces es interesante estudiar cómo es el funcional de Willmore de la superficie generada en el codominio, en relación con la superficie original. La interesante respuesta es que el valor de W no cambiará en absoluto en este proceso.
Es decir, demostramos el siguiente teorema:

> **Teorema 4** *Sea S una superficie orientable y compacta, y sea Φ una aplicación conforme e inyectiva. Entonces, $S' = \Phi(S)$ es una superficie orientable y compacta y $W(S) = W(S')$.*

Para ello, utilizamos el teorema de Liouville de las aplicaciones conformes:

> **Lema 5** ***Teorema de Liouville***
> *Toda aplicación conforme e inyectiva $\Phi : W_1 \to W_2$, siendo $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ abiertos, es composición de movimientos rígidos, inversiones y homotecias.*

Ahora solo resta verificar que, efectivamente, el valor de W se conserva para movimientos rígidos, inversiones y homotecias. Para ello, calculamos este valor utilizando las propiedades geométricas de cada una de estas aplicaciones.

La primera fórmula de variación

Dado que las **superficies de Willmore** se definen como las superficies en las que W alcanza un mínimo, es de sumo interés estudiar el comportamiento del funcional en las variaciones de una superficie.
Tal y como sucede con el funcional área, es práctico trabajar con variaciones normales de la superficie, lo que nos permite llegar al siguiente resultado:

> **Teorema 6** ***Primera fórmula de variación del funcional de Willmore y Fórmula de Euler-Lagrange***
> *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, no necesariamente compacta, y sea (U, X) una parametrización de S. Dada $\varphi : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto definida sobre U, se considera Φ la variación normal de X determinada por φ. Entonces la función $w(t) = W(\Phi(U, t))$, que devuelve el funcional de Willmore para cada superficie generada por la variación, es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene que*
>
> $$w'(0) = \int_R \phi(\Delta H + 2H(H^2 - 2K))dS,$$
>
> *donde $R = X(\mathrm{sop}\varphi) \subset S$ y $\phi \circ X = \varphi$.*
> *Como consecuencia, podemos extender la definición de superficie de Willmore, prescindiendo de la compacidad. Así, una superficie es de Willmore si, y solo si, verifica la **ecuación de Euler-Lagrange**:*
>
> $$\Delta H + 2H\left(H^2 - K\right) = 0.$$

Como ejemplos:

- Los planos no son superficies compactas con la definición original (no son compactos), aunque sí que lo son con la nueva definición basada en la ecuación de Euler-Lagrange.
- Los trozos abiertos de esfera se pueden caracterizar como las únicas superficies de Willmore en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante no nula.

Convocatoria Premio RSME-UMU Fin de Grado 2022