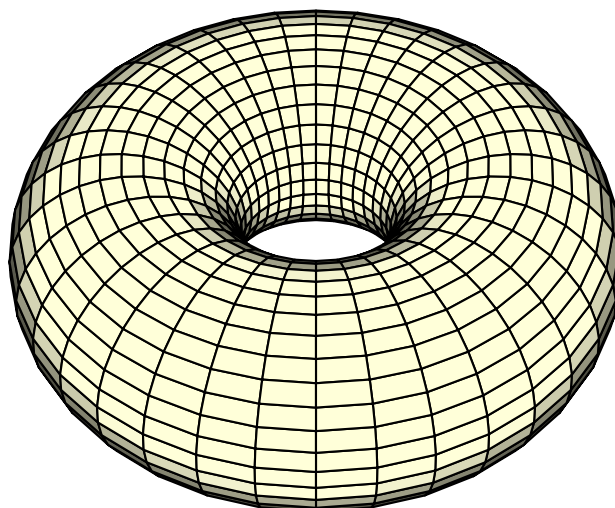




UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Superficies de Willmore en el espacio euclídeo



Autor: D. Jose Antonio Lorenzo Abril

Tutor: D. Luis José Alías Linares

2022

Declaración de originalidad

Jose Antonio Lorenzo Abril, autor del Trabajo de Fin de Grado *Superficies de Willmore en el espacio euclídeo*, bajo la tutela del profesor Luis José Alías Linares, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 6 de junio de 2022

Fdo.: Jose Antonio Lorenzo Abril

Este trabajo de fin de grado culmina una bonita etapa de mi vida, en la que he recibido un apoyo que difícilmente se puede agradecer en unas cuantas palabras. Quiero agradecer a mi familia por cuidarme siempre y dejarme libertad para tomar mis propias decisiones; a mis amigos por escucharme en los momentos duros; y a mis compañeros por el cariño recibido todos estos años.

Especialmente, dirigirme a Luis por toda la ayuda que me ha prestado, de la que siempre estaré agradecido. Como alumno (eterno) y como amigo.

Índice general

Abstract	V
Resumen	IX
1. Conceptos previos	1
1.1. Notación	1
1.1.1. Los símbolos de Christoffel	4
1.2. Funciones sobre superficies	5
1.2.1. Operadores diferenciales sobre superficies	8
1.3. Aplicaciones entre superficies	12
1.4. Integración en superficies	14
2. El funcional de Willmore	17
2.1. Definición y primeros resultados	17
2.2. La conjetura de Willmore.	25
3. Invarianza conforme del funcional de Willmore	31
3.1. Los tipos de aplicaciones conformes	31
3.2. La invarianza conforme del funcional de Willmore	34
4. La primera fórmula de variación	41
4.1. Análisis variacional del funcional de Willmore	41
5. Conclusión	57
A. Programa en Matlab para graficar un toro generalizado	61

Índice de figuras

2.1. Toro generalizado generado por $C(t)$ y radio del tubo $\varepsilon = 0,2$ 26

Abstract

Willmore surfaces have been a matter of great interest since Willmore popularized them back in 1965, when he published his famous article *Note on embedded surfaces*¹, in which he defines the functional that would later receive his name, as

$$\tau(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S H^2 dS,$$

being S a closed orientable regular surface of the Euclidean space and dS its area element, where H stands up for the mean curvature of S . The aim of Willmore was to find the relation between $\tau(S)$ and $\mathcal{X}(S)$, i.e., the relation between the defined functional and the Euler characteristic. He expected to obtain a relation similar to that of the Gauss-Bonnet theorem, which states that $\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = \mathcal{X}(S)$. Nonetheless, it seems that such a relation is not likely to arise, but it is possible to extract some properties of $\tau(S)$ if we know the value of $\mathcal{X}(S)$. For instance, Willmore proved that

$$\tau(\mathbb{S}^2(r)) = 2,$$

being $\mathbb{S}^2(r)$ the sphere of radius $r > 0$. Also, this is the infimum (and also the minimum) of τ among all possible surfaces S with $\mathcal{X}(S) = 2$. This is, in fact, the minimum among all possible surfaces.

Nonetheless, Willmore's functional has not usually been defined as it originally was by Willmore. Instead, it is usually multiplied by 2π , leading to the functional

$$W(S) = \int_S H^2 dS,$$

which is the notation that will be used in the present work. It is important to notice that the study of both functionals is equivalent in terms of finding surfaces that minimize them. Another alternative definition is

$$W(S) = \int_S (H^2 - K) dS,$$

being K the Gaussian curvature of the surface at each point. This functional is also equivalent to the previous one in the mentioned sense, because we are only adding a constant term, according to the mentioned Gauss-Bonnet theorem. This fact makes it possible to switch between the several equivalent definitions of the functional in convenience with the situation.

After finding the absolute minimum of W , Willmore tried to reach a similar result for surfaces with Euler characteristic $\mathcal{X}(S) = 0$, i. e., surfaces that are homeomorphic to a torus. He was not able to achieve this result, but he characterized the minimum of τ among all tori of revolution. This minimum

¹See [Wil65].

is reached with the torus whose radii are in a proportion of $\frac{1}{\sqrt{2}}$. He then hypothesized that this is, in fact, the minimum among all surfaces of genus 1 (i.e. $\mathcal{X}(S) = 0$). This statement became later known as *the Willmore conjecture*, and plenty of literature about the matter has come up since then. The Willmore functional can be used as a measure of the niceness of a surface, in the sense of being as close as possible to the minimum value that each one can reach (given the topological properties of the surface). From this point of view, those surfaces that reach this minimum are the best surfaces, regarding the Willmore functional. These surfaces are called (not surprisingly at all) Willmore surfaces. This minimization property is of great interest, as it is usual to find physical problems in which the minimization of a given energy arises. From this point of view, we can think of the Willmore functional as an energy of a surface, and Willmore surfaces are those that minimize this energy. The simplest energy we could think of is the area functional, but Willmore functional is the following in terms of simplicity. Surprisingly, from this simplicity arises a lot of properties, facts and results, and we are far from knowing everything about W . Instead, there are many unknowns that are reviewed in [MN14b].

The Willmore surfaces and his conjecture became almost a whole new branch in differential geometry, and many researchers became attracted to the matter. Not only mathematicians, but also researchers from other fields were interested in the further study of the properties of the Willmore functional. For example, biologists discovered that some cells and vesicles present such a morphology that makes them a subspecies of the Willmore surfaces, as they minimize the energy $E(S) = \int_S H^2 dS - \alpha A(S) - \beta V(S)$, given α and β , where $A(S)$ and $V(S)$ denote, respectively, the area and the enclosed volume of S . Another example is its use in physics, as it was found related to the computation of the Hawking mass of a black hole. The reader interested in these topics is referred to [TA13] and [Koe21]. The functional has also been found of interest in the field of computer graphics, in which it is useful to study surface fairing, i.e., finding a function as smooth as possible that can represent a surface. This last application is explained in [LP88].

The conjecture was finally proven by Marques and Neves in their paper *Min-Max theory and the Willmore conjecture*², published in 2014, almost 50 years after the conjecture was stated. The proof exceeds the scope of this work, but interested readers are referred to the mentioned article. The same authors published another article, *The Willmore Conjecture*³, in which they give a great overview of all of these topics, including historical notes, and explain the ideas behind the proof they gave for the Willmore conjecture.

In the present work, we are going to revisit all of these results, and we will “translate“ the basics of the matter and some of its most important results to the modern notation and particularize the results to \mathbb{R}^3 , as Willmore did all of his work from a more general perspective. The aim is to make this beautiful branch of differential geometry accessible to math students from an undergraduate level.

We will also cover further results, that Willmore proved later and were published in his book *Riemannian Geometry*⁴. For instance, we will assess the conformal invariance of the Willmore functional as well as the variation formula that characterizes Willmore surfaces.

In the first chapter⁵, we will remind basic aspects of differential geometry, in order to set up the environment in which we will be working, as well as to establish some basic results that will be useful along the way. More precisely, we will introduce the notation that will be used along the work

²See [MN14a].

³See [MN14b].

⁴The book is [Wil96] and it covers a wide range of topics of Riemannian Geometry. We will always be referring to its Chapter 7.

⁵See Capítulo 1.

and we will remind some basic concepts of differential geometry that are key for the understanding of the whole memory, referring to specific books when a more detailed explanation could be helpful for an interested student. The focus will be on defining maps defined over surfaces and also those going from one surface to another, as well as the concepts of differentiation and integration of this kind of mappings.

The second chapter⁶ formally introduces the Willmore functional. In this chapter we will see that the minimum of the functional is 4π and it is reached only by the round sphere. We then manually compute the functional of the sphere and of the tori of revolution. This way, we get to the results that made Willmore establish his famous conjecture. Then, we obtain a lower bound for a more general class of tori, which is compatible with the conjecture. To finish the chapter, we state the Willmore conjecture and some side notes to its young proof.

In the third chapter⁷ we study the conformal invariance of the Willmore functional. That is, the Willmore functional of a surface is not altered by any conformal transformation of the ambient space. In order to achieve this result, we will make use of Liouville's Theorem of conformal mappings, which states that every conformal mapping is a composition of rigid motions, homotheties and inversions. Thus, we will see how the Willmore functional is preserved under every of these transformations and, consequently, also under conformal mappings.

As for the forth chapter⁸, we deal with the variational analysis of the Willmore functional, from which arises a characterization of the Willmore surfaces in terms of the curvatures of the surface. More precisely, we will achieve the result that ensures that a surface is Willmore if, and only if, the equality

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$$

holds⁹, where H and K stand up for the mean and Gauss curvature of the surface, respectively, and Δ denotes the Laplacian operator of S . This is the so called Euler-Lagrange equation of W , which means that the solution of the equation are those surfaces that are stationary points of W . This characterization is of great interest, as it allows us to redefine Willmore surfaces without the need to be restricted to compact surfaces. The redefinition is that a surface S is a Willmore surface if, and only if, it verifies the Euler-Lagrange equation of the Willmore functional. This increase the amount of Willmore surfaces as, for example, the plane is not a Willmore surface according to the first definition, but it is according to the redefinition.

⁶See Capítulo 2.

⁷See Capítulo 3.

⁸See Capítulo 4.

⁹It is worth (and fair) mentioning that even though Willmore independently studied these matters, there are precedents about which he found out later. For instance, Blaschke got to the same variational equation in the year 1929, in his book *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie III* ([Bla29]), where he mentioned Thomsen and Schadow as first authors of the equation in 1923. Also, the conformal invariance of the Willmore functional was proved by Chen in 1973 ([Che73]).

Resumen

Las superficies de Willmore han sido un tema de gran interés desde que Willmore las definió en 1965, en su famoso artículo *Note on embedded surfaces*¹⁰, en el que definió el funcional que terminaría llevando su nombre. Este funcional lo definió como

$$\tau(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S H^2 dS,$$

donde S es una superficie regular cerrada y orientable y dS su elemento de área, donde aquí por cerrada entendemos compacta y sin borde y H denota la curvatura media de S . Willmore pretendía establecer la relación entre $\tau(S)$ y $\mathcal{X}(S)$. O sea, la relación entre su funcional y la característica de Euler. En un principio, creía posible encontrar una relación similar a la que establece el teorema de Gauss-Bonnet entre la integral de la curvatura de Gauss de una superficie y $\mathcal{X}(S)$, que no es ni más ni menos que $\frac{1}{2\pi} \int_S K dS = \mathcal{X}(S)$. Sin embargo, no parece que sea posible establecer una relación de este tipo, aunque sí podemos estudiar algunas características de $\tau(S)$ conociendo el valor de $\mathcal{X}(S)$. Por ejemplo, Willmore probó que

$$\tau(\mathbb{S}^2(r)) = 2,$$

donde $\mathbb{S}^2(r)$ es la esfera de radio $r > 0$. Además, este valor es el ínfimo (y el mínimo) de τ entre todas las superficies de género 0. Más aún, este es el mínimo de τ entre todas las superficies posibles.

No obstante, el funcional de Willmore no suele definirse tal y como lo hizo Willmore originariamente, sino que es normal multiplicarlo por 2π , obteniendo el funcional $W(S) = \int_S H^2 dS$, que se corresponde con la notación que usaremos en el presente trabajo. Es importante darse cuenta que el estudio de ambos funcionales es equivalente, en términos de la búsqueda de las superficies que los minimizan. Otra definición alternativa es $W(S) = \int_S (H^2 - K) dS$, donde K representa la curvatura de Gauss de la superficie en cada punto. Este funcional es equivalente a los dos anteriores en el mismo sentido de búsqueda de mínimos, ya que realmente solo estamos añadiendo un término constante, como asegura el teorema de Gauss-Bonnet. Este hecho nos permite intercambiar las diferentes definiciones equivalentes del funcional cuando la situación lo requiera.

Tras encontrar el mínimo absoluto de W , Willmore trató de probar un resultado similar para superficies con característica de Euler 0, o sea, superficies homeomorfas al toro. No fue capaz de hacerlo, pero sí que encontró el mínimo del funcional entre los toros de revolución, que se alcanza en aquellos toros cuyos radios mayor y menor están en una relación de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tras estudiar también los toros generalizados desde este punto de vista, conjeturó que, de hecho, este es el mínimo entre todas las superficies de género 1. Esta afirmación terminó en popularizarse como *la conjetura de Willmore*, y muchos matemáticos se han dedicado a su estudio desde entonces. Por otro lado, el funcional de

¹⁰Véase [Wil65].

Willmore puede utilizarse como una medida de la bonanza de una superficie, en el sentido de estar tan cerca como sea posible del mínimo valor que puede alcanzar dadas sus características topológicas. Desde este punto de vista, aquellas superficies que alcanzan este mínimo son las mejores, según el funcional de Willmore. Estas superficies se denominan *superficies de Willmore*. Esta propiedad de minimización es de gran interés, ya que es recurrente la necesidad de minimizar algún tipo de energía para resolver un problema físico concreto. Desde este punto de vista, podemos ver el funcional de Willmore como una energía de las superficies, y las superficies de Willmore son aquellas para las cuales esta energía es mínima. La energía más simple en la que podemos pensar es el funcional de área, pero el funcional de Willmore ocuparía el segundo puesto. Sorprendentemente, a partir de esta simplicidad es posible extraer una enorme cantidad de propiedades, hechos y resultados, y nos encontramos aún lejos de conocer por completo el comportamiento de W . Hay aún muchas incógnitas, que son revisadas en [MN14b].

Las superficies de Willmore y su conjetura se establecieron prácticamente como un área independiente en geometría diferencial, y muchos investigadores han estudiado estos temas. Además de matemáticos, investigadores de diversos campos han prestado interés al estudio de las propiedades del funcional de Willmore. Por ejemplo, en el campo de la biología se descubrió que la morfología de ciertas células y vesículas minimizan un funcional muy relacionado con el de Willmore, que es $E(S) = \int_S H^2 dS - \alpha A(S) - \beta V(S)$, para ciertos α y β , donde $A(S)$ y $V(S)$ denotan, respectivamente, el área y el volumen encerrado por S . Otro ejemplo es su uso en física, donde se encontró su relación con el cálculo de la masa de Hawking de un agujero negro. El lector interesado en estos temas puede leer [TA13] y [Koe21]. El funcional de Willmore también ha sido utilizado en el campo de los gráficos por ordenador, en el que ha resultado útil para estudiar la técnica de *surface fairing*, es decir, la búsqueda de funciones tan suaves como sea posible que puedan representar una superficie. Esta última aplicación se explica en [LP88].

Finalmente, la conjetura resultó cierta, como probaron Marques y Neves en su artículo *Min-Max theory and the Willmore conjecture*¹¹, de 2014, casi 50 años después de que esta fuese enunciada. La prueba sobrepasa los objetivos del trabajo, pero el lector interesado queda referenciado al citado artículo. Los mismos autores publicaron otro artículo, *The Willmore Conjecture*¹², en el que recapitulan la historia de la conjetura y diversas cuestiones relacionadas con el funcional de Willmore, y explican la idea tras su prueba.

En este trabajo, vamos a ver muchos de estos resultados, y "traduciremos" los aspectos básicos de la materia y algunos de sus resultados más relevantes a la notación moderna, así como los particularizaremos al caso de \mathbb{R}^3 , ya que Willmore y sus sucesores en el asunto tratan el tema en un contexto más general. El objetivo es hacer que esta bella parcela de la geometría diferencial sea accesible para estudiantes del grado en matemáticas.

Además, veremos algunos resultados posteriores, que Willmore probó más tarde y publicó en su libro *Riemannian Geometry*¹³. Concretamente, veremos la invarianza conforme del funcional de Willmore, así como la fórmula de variación que caracteriza a las superficies de Willmore.

En el primer capítulo¹⁴, recordaremos algunos aspectos básicos de geometría diferencial y estableceremos algunos resultados básicos que resultarán útiles a lo largo del trabajo. Concretamente, introduciremos la notación que será utilizada a lo largo de la memoria y recordaremos algunos con-

¹¹Véase [MN14a].

¹²Véase [MN14b].

¹³Este es [Wil96] y trata gran cantidad de temas de Geometría de Riemann. Al hablar de este libro nos referiremos siempre al Capítulo 7.

¹⁴Véase el Capítulo 1.

ceptos básicos de geometría diferencial que son clave para la comprensión del trabajo, referenciando a libros concretos cuando una explicación más detallada pueda ser de ayuda al estudiante interesado. El foco se pondrá en la definición de funciones sobre superficies, así como funciones entre superficies, y los conceptos de diferenciación e integración de estos tipos de funciones.

El segundo capítulo¹⁵ sirve para introducir el funcional de Willmore. Veremos que el mínimo es 4π y que se alcanza solo en el caso de la esfera. Tras esto, calcularemos el funcional de la esfera y de los toros de revolución. Esto nos permitirá llegar al resultado que hizo a Willmore plantear su conjetura. Por último, encontraremos una cota inferior para el funcional en una familia más general de toros, cota que será compatible con la establecida por la conjetura, con cuyo enunciado y algunas notas sobre su demostración concluiremos el capítulo.

En el tercer capítulo¹⁶ veremos la invarianza conforme del funcional de Willmore. Es decir, veremos que el funcional de Willmore de una superficie permanece inalterado por transformaciones conformes del espacio ambiente. Para probar este resultado haremos uso del teorema de Liouville sobre transformaciones conformes, que asegura que toda transformación conforme es composición de movimientos rígidos, homotecias e inversiones. Por tanto, veremos que W es invariante bajo cada una de estas transformaciones y, consecuentemente, también bajo cualquier transformación conforme.

Respecto al capítulo cuatro¹⁷, desarrollaremos un análisis variacional del funcional de Willmore, mediante el que obtendremos una caracterización de las superficies de Willmore en términos de las curvaturas de la superficie. Concretamente, veremos que una superficie es de Willmore si, y solo si, se verifica

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0,^{18}$$

donde H y K denotan, respectivamente, la curvatura media y la curvatura de Gauss de S , y Δ es el operador laplaciano de S . Esta es la conocida ecuación de Euler-Lagrange del funcional W , lo que quiere decir que la solución a la ecuación la proporcionan aquellas superficies que son puntos estacionarios de W . Esta caracterización tiene gran interés, ya que nos permite redefinir las superficies de Willmore prescindiendo de la compacidad de las superficies. La redefinición es que una superficie S es una superficie de Willmore si, y solo si, verifica la ecuación de Euler-Lagrange del funcional de Willmore. Esto aumenta la cantidad de superficies de Willmore ya que, por ejemplo, un plano no es una superficie de Willmore según la primera definición, pero sí que lo es según la redefinición.

¹⁵Véase el Capítulo 2.

¹⁶Véase el Capítulo 3.

¹⁷Véase el Capítulo 4.

¹⁸Es justo mencionar que aunque Willmore estudió todos asuntos de forma independiente, hay precedentes de los que tuvo cuenta más tarde. Por ejemplo, Blaschke consiguió la misma ecuación variacional en el año 1929, en su libro *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie III* ([Bla29]), en el que menciona a Thomsen y Schadow como primeros autores de la ecuación en 1923. Además, la invarianza conforme del funcional de Willmore fue probada por Chen en 1973 ([Che73]).

Capítulo 1

Conceptos previos

Este primer capítulo trata de situar al lector en el contexto adecuado para la comprensión de todo el texto. Se asume por su parte un conocimiento de las bases de la geometría diferencial en el espacio euclídeo¹.

1.1. Notación

A lo largo de toda esta memoria denotaremos por $S \subset \mathbb{R}^3$ a una **superficie regular** del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , $T_p S$ será el **plano tangente** a S en el punto p y en este tendremos un producto escalar inducido por el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 , que constituirá lo que damos en llamar la **primera forma fundamental** de S .

Convendremos en llamar al par (U, X) una **carta** de S cuando U sea un abierto de \mathbb{R}^2 y $X : U \rightarrow S$ sea una parametrización de $X(U) \subset S$. En ocasiones diremos que (U, X) es una carta de S en p , lo que significará que (U, X) es una carta de S y que $p \in X(U)$.

Dada una carta (U, X) de S , el plano tangente en $p = X(u, v) \in S$ será

$$T_p S = \text{span} \{X_u(u, v), X_v(u, v)\},$$

donde estamos denotando $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ y $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$, y los **coeficientes de la primera forma fundamental** serán

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle,$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle,$$

$$G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle.$$

La primera forma fundamental es importante, pues ayuda a definir las integrales sobre superficies, y estas tendrán una importancia central en este trabajo, especialmente en la parte del cálculo variacional.

Siguiendo con los preliminares, debemos notar que en este punto disponemos de escasas herramientas para obtener los valores de las curvaturas de Gauss y media. Para ello es de gran interés la introducción del endomorfismo de Weingarten y la segunda forma fundamental. Como hemos comentado, la primera forma fundamental consiste en inducir el producto escalar usual en el espacio tangente a cada punto de la superficie. Utilizando el endomorfismo de Weingarten puede definirse de manera

¹Una muy buena introducción a la materia, en caso de ser necesaria, puede encontrarse en [HP19].

similar la segunda forma fundamental. Una vez que disponemos de las dos formas fundamentales y sabemos calcular sus coeficientes, tenemos una forma sencilla de calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media, así como de simplificar diversas formulaciones que, sin recurrir a estos coeficientes serían extremadamente complejas, como la expresión en coordenadas del laplaciano de una función definida sobre una superficie, que veremos más adelante.

Definición 1.1.1. Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Se denomina **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a la aplicación lineal $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Proposición 1.1.2. *El operador forma A_p es autoadjunto.*

La demostración de este resultado puede consultarse en [HP19].

Definición 1.1.3. La aplicación $\Pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Pi_p(\vec{v}) = \langle A_p \vec{v}, \vec{v} \rangle$ se denomina la **segunda forma fundamental** de S en p .

Proposición 1.1.4. *Los valores propios de A_p son las curvaturas principales de S en p .*

La demostración puede leerse en [HP19].

Ya estamos en disposición de recordar dos de los conceptos centrales del trabajo: la curvatura de Gauss y la curvatura media. Ambos valores están estrechamente relacionados con el funcional de Willmore, la filosofía tras la investigación por parte de Willmore, y diversas propiedades de este funcional.

Definición 1.1.5. Dada una superficie regular S , orientada por la aplicación de Gauss N , se define la **curvatura de Gauss** de S en $p \in S$ como el valor

$$K(p) = \det A_p = \det(-dN_p).$$

Si llamamos $k_1(p)$ y $k_2(p)$ a las curvaturas principales de S en p , entonces queda

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p).$$

Por otro lado, se denomina **curvatura media** de S en $p \in S$ al valor

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_p = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p),$$

o, lo que es lo mismo,

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Observación 1.1.6. Nótese que

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \frac{k_1^2}{4} + \frac{k_1 k_2}{2} + \frac{k_2^2}{4} - k_1 k_2 \\ &= \frac{k_1^2}{4} - \frac{k_1 k_2}{2} + \frac{k_2^2}{4} \\ &= \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Estos valores indican un comportamiento local en el punto al que se refieren, por lo que los puntos de una superficie suelen clasificarse atendiendo a los valores de las curvaturas. La clasificación se recoge en la siguiente definición, adaptada de [HP19].

Definición 1.1.7. Sea S una superficie regular orientada y $p \in S$. Entonces:

- p es **elíptico** si $K(p) > 0$.
- p es **hiperbólico** si $K(p) < 0$.
- p es **parabólico** si $K(p) = 0$, pero $H(p) \neq 0$.
- p es **plano** cuando $K(p) = H(p) = 0$.

Además, se definen los puntos umbilicales como aquellos en los que la curvatura no varía en ninguna dirección: todos los vectores del tangente son direcciones principales. Es decir, p es un **punto umbilical** si $k_1(p) = k_2(p)$. Cuando todos los puntos de una superficie son umbilicales, entonces la superficie se dice que es **totalmente umbilical**.

Las superficies totalmente umbilicales, en realidad, únicamente pueden ser trozos de esfera o de plano, como pone de manifiesto el siguiente teorema.

Teorema 1.2.4. *Sea S una superficie regular, orientable, conexa y totalmente umbilical. Entonces S es un trozo de esfera o un trozo de plano.*

La demostración de este resultado se encuentra en la siguiente sección², pues necesitamos el concepto de función diferenciable sobre una superficie, así como la forma de obtener la diferencial de este tipo de aplicaciones.

Una forma de poder manipular las curvaturas de forma más detallada que con su definición en un contexto más o menos genérico es utilizando las expresiones de estas en función de los coeficientes de las primera y segunda formas fundamentales.

La segunda forma fundamental, al igual que la primera, puede expresarse de forma local mediante sus coeficientes. La expresión de $\Pi_p(\vec{v})$ en función de sus coeficientes e, f y g es

$$\Pi_p(\vec{v}) = \Pi_p(\alpha'(0)) = u'(0)^2 e(\tilde{\alpha}(0)) + 2u'(0)v'(0)f(\tilde{\alpha}(0)) + v'(0)^2 g(\tilde{\alpha}(0)),$$

donde $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ es la expresión en coordenadas de una curva en S con condiciones iniciales p y \vec{v} .

Los coeficientes se obtienen mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle, \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle \\ &= \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle, \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Además, las curvaturas de Gauss y media pueden expresarse en función de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales en el punto $p = X(u, v)$ como

$$K(p) = K(X(u, v)) = K(u, v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(u, v),$$

y

$$H(p) = H(X(u, v)) = H(u, v) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}(u, v).$$

²Véase la Sección 1.2.

Por otro lado, la siguiente relación entre la traza de A_p^2 y las curvaturas nos será de utilidad en el análisis variacional de las superficies de Willmore:

Proposición 1.1.8. *Sea S una superficie regular con curvatura de Gauss K y curvatura media H . Sea A el endomorfismo de Weingarten asociado. Entonces*

$$\operatorname{tr}(A^2) = 4H^2 - 2K.$$

Demostración. Primero notamos que $H = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2}$ y $K = \det(A)$. Por otro lado, el polinomio característico de una matriz 2×2 , M , viene dado por

$$P_M(t) = t^2 - \operatorname{tr}(M)t + \det(M),$$

por lo que el polinomio característico de A es

$$P_A(t) = t^2 - 2Ht + K.$$

Ahora bien, el teorema de Cayley-Hamilton nos dice que

$$P_A(A) = 0,$$

lo que equivale a

$$A^2 - 2HA + KI_{T_pS} = 0,$$

o

$$A^2 = 2HA - KI_{T_pS}.$$

Tomando aquí la traza, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^2) &= \operatorname{tr}(2HA - KI_{T_pS}) \\ &= \operatorname{tr}(2HA) - \operatorname{tr}(KI_{T_pS}) \\ &= 2H\operatorname{tr}(A) - K\operatorname{tr}(I_{T_pS}) \\ &= 4H^2 - 2K, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver. □

1.1.1. Los símbolos de Christoffel

Dada una superficie S y una carta (U, X) de S , las derivadas parciales segundas de la parametrización X son vectores tridimensionales, que no están necesariamente en el espacio tangente a S , al contrario que las primeras derivadas parciales. Es decir, en general tendremos $X_{ij} = aX_u + bX_v + cN$, pues $\{X_u, X_v, N\}$ es una base del espacio. Partiendo de este hecho y manipulando las distintas ecuaciones se puede alcanzar la siguiente relación³, denominada **fórmulas de Weingarten**:

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{cases},$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k se denominan **símbolos de Christoffel** y vienen dados por:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2} \end{pmatrix}.$$

³Para un desarrollo detallado, de nuevo remitimos al lector a [HP19].

1.2. Funciones sobre superficies

Definición 1.2.1. Sea S una superficie regular, y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es **diferenciable** en p si, dada una parametrización (U, X) tal que $p \in X(U)$, f es diferenciable vista como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . O sea, si la función

$$f \circ X : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (f \circ X)(u, v) \end{array}$$

es diferenciable en (u, v) , con $X(u, v) = p$. Si f es diferenciable para todo p de S , diremos simplemente que f es diferenciable.

Para calcular la diferencial de una función diferenciable f en un punto p aplicada a un vector \vec{v} del espacio tangente $T_p S$, lo haremos computando

$$df_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)),$$

siendo $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva que verifica $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$.

La diferencial de una función definida sobre una superficie, al igual que ocurre con las funciones de variables reales, nos proporciona información sobre su comportamiento. Tal y como sucede en el contexto del análisis, si una función alcanza un extremo relativo, entonces la diferencial en dicho punto será nula. Este resultado es el establecido en los dos siguientes teoremas, que podemos encontrar en [\[MR98\]](#).

Teorema 1.2.2. *Sea S una superficie regular, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si f alcanza un extremo relativo en p_0 , entonces $df_{p_0} \equiv 0$.*

Demostración. Vamos a comenzar calculando la diferencial de f en p_0 que viene dada por

$$df_{p_0} : \begin{array}{ccc} T_{p_0} S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto & df_{p_0}(\vec{v}) \end{array},$$

y para cuyo cálculo tomamos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$ y hacemos

$$df_{p_0}(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)).$$

Supongamos ahora que f alcanza un máximo relativo en p_0 , de forma que existe $V(p_0)$ un entorno de p_0 de tal manera que $f(p) \leq f(p_0)$, para todo $p \in V(p_0)$. Dado $\vec{v} \in T_{p_0} S$, existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p_0, \alpha'(0) = \vec{v}$, y podemos tomar $\varepsilon' \leq \varepsilon$ verificando $\alpha(t) \in V(p_0)$, para todo $t \in (-\varepsilon', \varepsilon')$. Se tiene entonces que

$$f(\alpha(t)) \leq f(p_0) = f(\alpha(0)).$$

Si ahora llamamos $h(t) := f(\alpha(t))$, observamos que esta función real tiene un máximo en $t = 0$. Esto implica que $0 = h'(0) = df_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = df_{p_0}(\vec{v})$, como queríamos ver.

El caso en que f alcanza un mínimo relativo en p_0 , es análogo. □

También en superficies sucede que las funciones diferenciables con diferencial nula son constantes en cada componente conexa, tal y como sucede con las funciones reales.

Teorema 1.2.3. *Sea S una superficie regular conexa, y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $df_p \equiv 0$ para todo $p \in S$, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \in f(S)$ y definamos el conjunto

$$A = \{p \in S : f(p) = a\}.$$

Si vemos que $A = S$, habremos terminado. Utilizaremos el resultado de topología general que asegura que en un espacio topológico conexo, el único conjunto no vacío, abierto y cerrado es el espacio total.

Primero, claramente $A \neq \emptyset$, pues $a \in f(S)$.

Segundo, $A = f^{-1}(\{a\})$ es la preimagen por una aplicación continua de un conjunto cerrado, luego es cerrado.

Por último, veamos que A es abierto. Sea $p \in A$ y (U, X) una carta tal que $p \in V = X(U)$ con U conexo. Si probamos que $V \subset A$, habremos acabado. Así, sea $(u, v) \in U$, entonces

$$d(f \circ X)_{(u,v)} = df_{X(u,v)} \circ dX_{(u,v)} \equiv 0,$$

puesto que $df_{X(u,v)} \equiv 0$, por hipótesis. Como $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real con diferencial nula en U , entonces $f \circ X$ es constante. Por tanto, $f \circ X \equiv a$ en U . Consecuentemente, $f \equiv a$ en $X(U) = V$ y entonces $V \subset A$, como queríamos ver. \square

En este punto podemos ya probar el Teorema 1.2.4, que volvemos a enunciar:

Teorema 1.2.4. *Sea S una superficie regular, orientable, conexa y totalmente umbilical. Entonces S es un trozo de esfera o un trozo de plano.*

La demostración de este resultado ha sido extraída de [HP19].

Demostración. Como todos los puntos de S son umbilicales, se tiene $k_1(p) = k_2(p)$ para todo $p \in S$. Esto quiere decir que $H(p) = k_1(p) = k_2(p)$ y el operador forma A_p puede escribirse como

$$A_p = \begin{pmatrix} H(p) & 0 \\ 0 & H(p) \end{pmatrix} = H(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H(p) \cdot I_{T_p S}$$

en cualquier $p \in S$. Queremos ver en primer lugar que la función $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ es constante.

Así, sea $p \in S$ y (U, X) una carta de S en p , con $X(u, v) = p$. Consideremos la base del espacio tangente $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$. Tenemos

$$dH_p(X_u(u, v)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (H \circ \alpha)(t),$$

donde $\alpha(t) = X(u + t, v)$. De esta manera

$$dH_p(X_u(u, v)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (H \circ X)(u + t, v) = (H \circ X)_u(u, v).$$

De igual manera se obtiene

$$dH_p(X_v(u, v)) = (H \circ X)_v(u, v).$$

Ahora bien, como $A_p = H(p) \cdot I_{T_p S}$, entonces

$$\begin{aligned} (H \circ X)(u, v) \cdot X_u(u, v) &= H(p) X_u(u, v) = A_p(X_u(u, v)) \\ &= -dN_p(X_u(u, v)) = -(N \circ X)_u(u, v). \end{aligned}$$

Esto se verifica para todo $(u, v) \in U$, luego

$$-(H \circ X) X_u = (N \circ X)_u$$

en U .

De igual forma se tiene $-(H \circ X) X_v = (N \circ X)_v$.

Derivando estas dos identidades, la primera respecto de v y la segunda respecto de u , obtenemos

$$\begin{aligned} (N \circ X)_{uv} &= -(H \circ X)_v X_u - (H \circ X) X_{uv} \\ (N \circ X)_{vu} &= -(H \circ X)_u X_v - (H \circ X) X_{vu}. \end{aligned}$$

Pero, puesto que las derivadas cruzadas coinciden, podemos restar ambas identidades, obteniendo que

$$-(H \circ X)_v X_u + (H \circ X)_u X_v = \vec{0}.$$

Ahora bien, $\{X_u, X_v\}$ es una base de $T_p S$, luego una combinación lineal nula de estos vectores debe tener todos los coeficientes nulos. Es decir, que se tiene

$$(H \circ X)_v = (H \circ X)_u \equiv 0$$

en U y, en consecuencia, $dH_p(X_u(u, v)) = dH_p(X_v(u, v)) = \vec{0}$ para todo $p \in X(U)$. Esto implica que $dH_p \equiv 0$, y como S es conexa, podemos concluir que $H \equiv c$ para cierta constante real c , por el teorema anterior.

En este punto podemos distinguir dos casos:

1. Caso $c = 0$.

En este caso, $H \equiv 0$ y el operador forma es la matriz nula

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que $dN_p = 0$. Este hecho, sumado a la conexión de S , implica que $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es constante: $N \equiv \vec{a} \in \mathbb{S}^2$. Definimos la función $\phi(p) = \langle p, \vec{a} \rangle$ para $p \in S$. Si vemos que ϕ es constante, podremos concluir que S está contenida en un plano ortogonal al vector \vec{a} .

Sea entonces $\vec{v} \in T_p S$ y vemos que

$$\begin{aligned} d\phi_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \alpha(t), \vec{a} \rangle \\ &= \langle \alpha'(0), \vec{a} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = \vec{0}, \end{aligned}$$

donde α es una curva en S con condiciones iniciales p y \vec{v} . La última igualdad se debe a que $\vec{v} \in T_p S$ y \vec{a} es normal a S . De nuevo, la conexión de S nos proporciona lo que buscábamos: ϕ es constante y, como hemos explicado, S es un trozo de plano.

2. Caso $c \neq 0$.

En esta ocasión definimos la función $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(p) = p + \frac{1}{c}N(p)$, que es diferenciable. Si vemos que $\phi \equiv \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ para un vector fijo \vec{a} , entonces tendremos que, para todo $p \in S$ se verifica

$$p - \vec{a} = -\frac{1}{c}N(p),$$

que tomando módulos nos proporciona

$$\|p - \vec{a}\|^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Es decir, todos los puntos p de la superficie S distan lo mismo del punto $a = \vec{a}$, que es el vector anterior visto como punto del espacio. Esto no es ni más ni menos que decir que S es una circunferencia de centro a y radio $\frac{1}{c}$. Por tanto, tratemos de ver que ϕ es constante.

Calculemos, para ello, su diferencial:

$$\begin{aligned} d\phi_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\alpha(t) + \frac{1}{c}N(\alpha(t)) \right) \\ &= \alpha'(0) + \frac{1}{c}(N \circ \alpha)'(0), \end{aligned}$$

donde, de nuevo, α es una curva en S con condiciones iniciales p y \vec{v} . Así

$$\begin{aligned} d\phi_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi \circ \alpha)(t) = \vec{v} - \frac{1}{c}A_p(\vec{v}) \\ &= \vec{v} - \frac{1}{c} \cdot c \cdot \vec{v} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

Otra vez, la conexión de S nos da el resultado deseado. □

1.2.1. Operadores diferenciales sobre superficies

Esta subsección está basada en [Alí06], [ONe83] y [Ges20].

Un concepto interesante en relación con la diferencial de una función real definida en una superficie es el de gradiente. Lo vemos en esta definición:

Definición 1.2.5. Sea S una superficie regular, y $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El **gradiente** de ϕ es la aplicación diferenciable $\nabla\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, que asocia cada $p \in S$ con el único vector $\nabla\phi(p) \in T_pS$ que verifica

$$\langle \nabla\phi(p), \vec{v} \rangle = d\phi_p(\vec{v})$$

para todo $\vec{v} \in T_pS$.

Observación 1.2.6. Para ver la unicidad de $\nabla\phi(p)$, supongamos que existe \vec{u} tal que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = d\phi_p(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in T_pS$. Entonces

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \nabla\phi(p), \vec{v} \rangle = 0 \iff \langle \vec{u} - \nabla\phi(p), \vec{v} \rangle = 0,$$

pero esto se verifica para todo vector \vec{v} del espacio tangente, luego debe ser $\vec{u} - \nabla\phi(p) = \vec{0}$, o equivalentemente, $\vec{u} = \nabla\phi(p)$.

Ahora vamos a ver una forma de calcular explícitamente el gradiente de una función definida sobre una superficie, siempre y cuando dispongamos de una parametrización de la misma. Esto se debe a que vamos a obtener la expresión del gradiente de una función de la que conocemos su expresión en coordenadas respecto de una parametrización dada.

Teorema 1.2.7. Expresión en coordenadas del gradiente.

Dadas una superficie S , una carta (X, U) de S y una aplicación $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$, el gradiente de ϕ en $p = X(u, v)$ puede expresarse en función de (u, v) como

$$\nabla\phi(p) = \nabla\varphi(u, v) = \left(\frac{\varphi_u G - \varphi_v F}{EG - F^2} \right) \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) + \left(\frac{\varphi_v E - \varphi_u F}{EG - F^2} \right) \frac{\partial X}{\partial v}(u, v),$$

donde $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es la expresión en coordenadas de ϕ , es decir, $\varphi = \phi \circ X$.

Demostración. Primero, dado que $\nabla\phi(p) \in T_p S$, tendremos

$$\nabla\phi(p) = aX_u(u, v) + bX_v(u, v)$$

y estaremos por tanto interesados en calcular a y b .

En particular, si tomamos $(u, v) = X^{-1}(p) \in U$, tendremos

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(p), X_u(u, v) \rangle &= \langle aX_u + bX_v, X_u \rangle(u, v) \\ &= aE(u, v) + bF(u, v), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(p), X_v(u, v) \rangle &= \langle aX_u + bX_v, X_v \rangle(u, v) \\ &= aF(u, v) + bG(u, v). \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos aplicar la definición del gradiente, obteniendo

$$\langle \nabla\phi(p), X_u(u, v) \rangle = d\phi_p(X_u(u, v)),$$

pero tenemos que $\varphi = \phi \circ X$, y podemos hacer

$$d\varphi_{(u,v)} = d(\phi \circ X)_{(u,v)} = d\phi_{X(u,v)} \circ dX_{(u,v)} = d\phi_p \circ dX_{(u,v)},$$

en particular

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) = d\varphi_{(u,v)}(1, 0) = d\phi_p \circ dX_{(u,v)}(1, 0) = d\phi_p(X_u(u, v)).$$

Es decir, que

$$\langle \nabla\phi(p), X_u(u, v) \rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) = \varphi_u(u, v)$$

y de igual manera obtenemos

$$\langle \nabla\phi(p), X_v(u, v) \rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) = \varphi_v(u, v),$$

por lo que tenemos

$$\begin{cases} \varphi_u(u, v) = aE(u, v) + bF(u, v) \\ \varphi_v(u, v) = aF(u, v) + bG(u, v) \end{cases},$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix},$$

y entonces $a(u, v) = \frac{\varphi_u G - \varphi_v F}{EG - F^2}(u, v)$ y $b(u, v) = \frac{\varphi_v E - \varphi_u F}{EG - F^2}(u, v)$, tal y como queríamos ver. \square

Notemos que en la definición de gradiente decimos que es una aplicación diferenciable, aunque solo hemos visto lo que esto significa para funciones reales sobre superficies, y esta toma valores en el espacio euclídeo. Este tipo de aplicaciones se conocen como campos de vectores, que definimos a continuación.

Definición 1.2.8. Dada una superficie regular S , un **campo de vectores** sobre S es una aplicación $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, que a cada punto $p \in S$ le asigna un vector $F(p) \in \mathbb{R}^3$.

Un campo de vectores se dice que es **diferenciable** en p si, dada una parametrización (U, X) con $p \in X(U)$, F es diferenciable vista como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 . O sea, si

$$\begin{aligned} F \circ X : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (F \circ X)(u, v) \end{aligned}$$

es diferenciable en (u, v) tales que $X(u, v) = p$. Si F es diferenciable para todo p de S , diremos que F es un campo de vectores diferenciable.

Un campo de vectores es **tangente** a la superficie S si, para todo $p \in S$, se verifica $F(p) \in T_p S$; por el contrario, se dirá que es **normal** si $\langle F(p), \vec{v} \rangle = 0$, para todo $\vec{v} \in T_p S$. El conjunto de todos los campos de vectores tangentes a S se denota $\mathfrak{X}(S)$ y el de los normales $(\mathfrak{X}(S))^\perp$.

Ejemplo 1.2.9. El gradiente es un campo de vectores tangente, para cualquier función diferenciable f .

Ejemplo 1.2.10. La aplicación de Gauss, $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, que a cada $p \in S$, le asocia el vector normal a la misma (elegida una orientación), es un campo de vectores diferenciable y normal a S .

Notemos en este punto que si un campo de vectores es diferenciable entonces podemos pensar en calcular su derivada, y nos daremos cuenta rápidamente de que esta derivada es más compleja que la vista para funciones reales, por el simple hecho de que obtendremos un nuevo campo de vectores, y será interesante estudiar la relación de las derivadas con nuestra superficie. Concretamente, nos centramos en el estudio de la diferenciabilidad de los campos tangentes.

Definición 1.2.11. Sea $F \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores diferenciable y tangente a S . Para cada $p \in S$, definimos la **derivada usual** del campo respecto a un vector $\vec{v} \in T_p S$ como

$$dF_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\alpha(t)),$$

donde, de nuevo, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$.

Y en este punto vemos que esta derivada puede darnos cualquier vector del espacio, por lo que podría parecernos interesante (y realmente lo es), separarlo en sus componentes tangente y normal a la superficie. La parte tangente de la derivada usual se denomina derivada covariante.

Definición 1.2.12. Sea $F \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores diferenciable y tangente a S . Para cada $p \in S$, se define la **derivada covariante** del campo respecto a un vector $\vec{v} \in T_p S$ como

$$D_{\vec{v}}F_p = (dF_p(\vec{v}))^\top.$$

Observación 1.2.13. Se da la igualdad

$$dF_p(\vec{v}) = D_{\vec{v}}F_p + (dF_p(\vec{v}))^\perp = D_{\vec{v}}F_p + \lambda(p, \vec{v}) \cdot N(p),$$

siendo $\lambda(p, \vec{v})$ un escalar.

Por otro lado, como $N(p)$ es unitario, obtenemos que

$$\langle dF_p(\vec{v}), N(p) \rangle = \langle \underbrace{D_{\vec{v}}F_p}_{\vec{0}}, N(p) \rangle + \lambda(p, \vec{v}),$$

es decir,

$$\lambda(p, \vec{v}) = \langle dF_p(\vec{v}), N(p) \rangle,$$

y podemos calcular la derivada covariante mediante la expresión

$$D_{\vec{v}}F_p = dF_p(\vec{v}) - \langle dF_p(\vec{v}), N(p) \rangle \cdot N(p).$$

Estamos ya en condiciones de explorar los operadores divergencia y laplaciano. Un estudio profundo de estos operadores queda fuera de la órbita de objetivos de este texto, aunque se van a proporcionar sus definiciones y ciertas propiedades básicas en aras de completitud, ya que el laplaciano de la curvatura media aparecerá en el análisis variacional del funcional de Willmore. Más aún, aparecerá en la fórmula que caracteriza las superficies de Willmore como puntos críticos del funcional.

Definición 1.2.14. Sea S una superficie regular, y $F \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores tangente a S . Para cada $p \in S$, definimos la **divergencia** de F en p como la traza de la aplicación lineal

$$DF(p): \begin{array}{ccc} T_p S & \rightarrow & T_p S \\ \vec{v} & \rightarrow & D_{\vec{v}}F_p \end{array},$$

que lleva cada vector del plano tangente en p a la derivada covariante en p de F con respecto a \vec{v} . Este operador se denota por $\operatorname{div}F$, es decir

$$\operatorname{div}F(p) = \operatorname{tr}(DF(p)).$$

Observación 1.2.15. Sabemos que la curvatura media $H(p)$ de una superficie S en un punto p es

$$H(p) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(dN_p)$$

y, como $\|N(p)\| = 1$, entonces se tiene que $\langle N(p), dN_p \vec{v} \rangle = 0$, para todo $v \in T_p S$. Esto quiere decir que $D_{\vec{v}}N_p = dN_p(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in T_p S$ y, en consecuencia, es

$$H(p) = -\frac{1}{2}\operatorname{div}(N(p)).$$

En este caso, y aunque la definición de div se ha dado para campos tangentes, tiene sentido calcular $\operatorname{div}(N)$ porque $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$ al ser $\langle N, N \rangle \equiv 1$.

Por otro lado, el laplaciano es el caso particular de la divergencia en la que el campo F coincide con el gradiente de una función diferenciable f :

Definición 1.2.16. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, se define el **laplaciano** de f en S , para $p \in S$, como

$$\Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f(p)).$$

Proposición 1.2.17. Expresión en coordenadas del laplaciano.

Sea S una superficie regular y $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea (U, X) una carta de S . Entonces, si $\varphi = \phi \circ X$ es la expresión en coordenadas de ϕ , la expresión en coordenadas de la función $\Delta\phi$ viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta\phi \circ X = & \frac{G}{EG - F^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] \\ & - \frac{2F}{EG - F^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] \\ & + \frac{E}{EG - F^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Este resultado lo utilizaremos en el análisis variacional del funcional de Willmore, pero su demostración excede los objetivos de esta memoria. El lector interesado puede consultarla en [ONe83].

1.3. Aplicaciones entre superficies

De igual modo que definimos funciones cuyo dominio es una superficie, podemos plantearnos la tarea de definir funciones que vayan de una superficie en otra y estudiar su diferenciability. Esta sección está dedicada a recordar definiciones y resultados básicos de este tipo de aplicaciones, que serán utilizados a lo largo de la memoria.

Comencemos, pues, con la definición de una aplicación diferenciable entre dos superficies, de nuevo basada en el desarrollo de [HP19].

Definición 1.3.1. Sean S_1 y S_2 superficies regulares y $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación. Diremos que F es **diferenciable** si, para todo $p \in S_1$ y cualesquiera cartas (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$, la expresión en coordenadas de F ,

$$\tilde{F} = X_2^{-1} \circ F \circ X_1,$$

es diferenciable en el sentido ordinario sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Equivalentemente, se puede decir que F es diferenciable si la aplicación $i \circ F : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable, siendo $i : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión.

Observación 1.3.2. La demostración de esta equivalencia puede consultarse en [HP19].

Observación 1.3.3. Para que F sea diferenciable basta que, para todo $p \in S_1$, existan cartas (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$, tales que $\tilde{F} = X_2^{-1} \circ F \circ X_1$ es diferenciable en $U_1 \subset \mathbb{R}^2$.

Este concepto de aplicación diferenciable entre superficies nos permite estudiar cierta equivalencia entre superficies: la difeomorfía. La idea es reforzar el concepto de un homeomorfismo entre

espacios topológicos, añadiendo la componente diferencial inherente a los estudios geométricos de las superficies. Intuitivamente, dos superficies son difeomorfas cuando podemos transformar una en la otra sin cortar ni unir trozos (esto nos lo da el homeomorfismo) y sin modificar la suavidad de la superficie (la característica que añadimos al obligar a que la transformación sea diferenciable). De forma más precisa, se define como sigue.

Definición 1.3.4. Una aplicación $F : S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies regulares es un **difeomorfismo** si F es un homeomorfismo entre S_1 y S_2 y tanto F como F^{-1} son diferenciables.

En caso de que F sea un difeomorfismo, diremos que S_1 es **difeomorfa** a S_2 , y se denotará $S_1 \approx S_2$.

Observación 1.3.5. La relación «ser difeomorfas» es una relación de equivalencia.

Vamos a ver un resultado de gran interés, pues establece que si tenemos una aplicación difeomorfa entre abiertos del espacio euclídeo y en el dominio nos restringimos a una superficie regular contenida en el primer abierto, entonces la imagen de esta superficie regular, será también una superficie regular contenida en el codominio del difeomorfismo. Los dos siguientes teoremas, junto con muchos otros resultados relacionados, pueden consultarse en [MR98].

Teorema 1.3.6. Sean $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ abiertos y $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ un difeomorfismo. Si $S_1 \subset V_1$ es una superficie regular, entonces $S_2 = \phi(S_1)$ es una superficie regular.

Demostración. Sea (U, X) una carta de S_1 . Si vemos que $(U, \phi \circ X)$ es una carta de S_2 , habremos terminado. Primero, $X(U) \subset S_1$ implica $(\phi \circ X)(U) \subset \phi(S_1) = S_2$. Después, $\phi \circ X$ es diferenciable, por ser composición de diferenciables; $(\phi \circ X)^{-1} = X^{-1} \circ \phi^{-1}$ es continua, por ser composición de continuas; y dado $q \in U$, $d(\phi \circ X)(q) = d\phi_{X(q)} \circ dX_q$ es inyectiva, por ser composición de inyectivas.

Así, $(U, \phi \circ X)$ es una carta de S_2 y tenemos el resultado. □

Los difeomorfismos también se comportan bien respecto al plano tangente, transformando el plano tangente de la superficie origen en el plano tangente de la superficie destino a través de su diferencial:

Teorema 1.3.7. Sean $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ abiertos, $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ un difeomorfismo, S_1 una superficie y $S_2 = \phi(S_1)$. Entonces

$$T_{\phi(p)}S_2 = d\phi_p(T_pS_1).$$

Demostración. Sabemos que

$$T_{\phi(p)}S_2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2, \beta(0) = \phi(p), \beta'(0) = \vec{v}\},$$

y vamos a ver primero que $d\phi_p(T_pS_1) \subset T_{\phi(p)}S_2$. Para ello, sea $\vec{v} \in T_pS_1$, de forma que existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$. Definimos $\beta(t) = \phi(\alpha(t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$, que verifica $\beta(0) = \phi(\alpha(0)) = \phi(p)$ y $\beta'(0) = d\phi_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = d\phi_p(\vec{v}) \in T_{\phi(p)}S_2$. Por tanto, tenemos la inclusión

$$d\phi_p(T_pS_1) \subset T_{\phi(p)}S_2.$$

Pero, además, como ϕ es un difeomorfismo, entonces $d\phi_p$ es un isomorfismo lineal, eso quiere decir que $\dim(d\phi_p(T_pS_1)) = 2$, y queda demostrada la igualdad entre ambos planos tangentes. □

1.4. Integración en superficies

Vamos a terminar este capítulo introductorio recordando el concepto de integración sobre superficies, que es central para estudiar el funcional de Willmore y sus propiedades.

Dada una función real definida sobre una superficie $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ y dada una carta (U, X) de S , podemos tomar la expresión en coordenadas de ϕ , $\varphi = \phi \circ X$, de forma que podemos integrar φ de la forma usual y parece razonable y natural pensar que, de alguna forma, la *integral de ϕ sobre $X(U)$* debe definirse de forma que coincida con la integral de φ sobre U , que sabemos calcular. Esto sucede así con una salvedad, y pasa por aplicar la fórmula del cambio de variable, a partir de la cual aparece el elemento de área, que mide cómo varía la superficie $X(U)$ respecto de U . Vamos a ver esto ahora con precisión, adaptando el contenido desarrollado en [HP19].

Definición 1.4.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientada, con aplicación de Gauss N . Se denomina **elemento de área** de S en un punto $p \in S$ a la aplicación

$$dS(p) : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \det(\vec{v}, \vec{w}, N(p)).$$

Observación 1.4.2. $dS(p)$ es una forma bilineal antisimétrica.

Observación 1.4.3. Calculemos el elemento de área sobre los vectores de la base del espacio tangente $\{X_u, X_v\}$, dada la carta (U, X) . Será

$$\begin{aligned} dS(p)(X_u(u, v), X_v(u, v)) &= \det(X_u(u, v), X_v(u, v), N(p)) \\ &= \det\left(X_u(u, v), X_v(u, v), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)\right) \\ &= \frac{1}{\|X_u \wedge X_v\|(u, v)} \det(X_u(u, v), X_v(u, v), X_u \wedge X_v(u, v)) \\ &= \frac{1}{\|X_u \wedge X_v\|(u, v)} \langle X_u \wedge X_v(u, v), X_u \wedge X_v(u, v) \rangle \\ &= \|X_u \wedge X_v\|(u, v) \\ &= \sqrt{EG - F^2}(u, v). \end{aligned}$$

Intuitivamente, esto significa que por cada unidad de área de U , hay $\sqrt{EG - F^2}(u, v)$ unidades de área en $X(U)$. Compárese este hecho con lo que sucede al hacer, por ejemplo, un cambio de variable lineal, dado por una matriz cuadrada M , que varía la unidad de área del espacio de salida en una cantidad de $\det(M)$ unidades en el espacio de llegada. De esta forma, podemos utilizar el elemento de área para calcular el área de una superficie (siempre que esta esté acotada). Veamos cómo.

Definición 1.4.4. Se define una **región** $R \subset S$ como un subconjunto conexo y relativamente compacto cuya frontera es una unión finita de curvas regulares homeomorfas a \mathbb{S}^1 .

Definición 1.4.5. El **área** de una región $R \subset S$ viene dada por la expresión

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

donde (U, X) es cualquier carta tal que $R \subset X(U)$.

Ejemplo 1.4.6. Área de una esfera

Calculemos para ilustrar esta definición el área de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$, $r > 0$. Tomamos la parametrización

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \cos \varphi),$$

donde $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Obtengamos, entonces, el elemento de área. Se tiene

$$\begin{aligned} X_\theta &= (r \sin \varphi \cos \theta, -r \sin \varphi \sin \theta, 0), \\ X_\varphi &= (r \cos \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi), \\ E &= r^2 \sin^2 \varphi, \\ F &= 0, \\ G &= r^2. \end{aligned}$$

Luego

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \sqrt{r^4 \sin^2 \varphi} d\theta d\varphi = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi,$$

y entonces

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi r^2.$$

Por último, introducimos la integral de una función real definida sobre una superficie.

Definición 1.4.7. Dada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, donde S es una superficie regular orientada, se define el **soporte** de f como el conjunto

$$\text{sop}(f) = \text{cl} \{p \in S : f(p) \neq 0\}.$$

Este soporte normalmente lo supondremos compacto, para poder realizar integrales sin preocuparnos de que la integral sea indefinida y diverja.

Como adelantábamos, es natural definir el valor de la integral de f sobre S como la integral de la expresión en coordenadas de f , \tilde{f} , sobre U , pero teniendo en cuenta la variación inducida por la transformación X .

Definición 1.4.8. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función con soporte compacto, definida sobre una superficie regular orientada S , y una carta (U, X) tal que $\text{sop}(f) \subset X(U)$. Se define la **integral de f en S** como

$$\int_S f dS = \iint_U (f \circ X)(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

siempre y cuando la integral sobre $U \subset \mathbb{R}^2$ esté definida.

Observación 1.4.9. Esta definición es independiente de la parametrización escogida.

Capítulo 2

El funcional de Willmore

2.1. Definición y primeros resultados

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, compacta y orientable. Definimos el **funcional de Willmore** de S como

$$W(S) = \int_S H^2 dS,$$

donde H es la curvatura media en cada punto de S y dS representa el elemento de área de la superficie.

Más generalmente, si denotamos por $SCO(\mathbb{R}^3)$ al conjunto de las superficies compactas y orientadas en \mathbb{R}^3 , podemos definir

$$\begin{aligned} W : SCO(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ S &\longmapsto W(S) = \int_S H^2 dS. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos ahora definir una **superficie de Willmore** como aquella que es un punto crítico de W . Por tanto, será interesante usar las técnicas del cálculo variacional para ver las características esenciales de estos tipos de superficies. Un hecho interesante es que W tiene un mínimo global y que, además, es conocido, como se demuestra en el siguiente teorema, precedido de un lema sencillo:

Lema 2.1.1. *Si dada $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$ definimos $S^+ := \{p \in S \mid K(p) \geq 0\}$, entonces la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ restringida a S^+ es sobreyectiva.*

Esta demostración ha sido adaptada de [Ges20].

Demostración. Sea $\vec{a} \in \mathbb{S}^2$ y

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \langle p, \vec{a} \rangle. \end{aligned}$$

Como S es compacta, entonces existen dos puntos $p_0, p_1 \in S$ tales que $f(p_0) = \max\{f(p) \mid p \in S\}$ y $f(p_1) = \min\{f(p) \mid p \in S\}$. Vamos a calcular $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$. Para ello, dado $\vec{v} \in T_p S$, tomamos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva regular con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$, de forma que

$$df_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle \alpha(t), \vec{a} \rangle) = \langle \alpha'(0), \vec{a} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$df_p \equiv 0 \iff \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = 0, \text{ para todo } \vec{v} \in T_p S \iff N(p) = \pm \vec{a}.$$

Por el Teorema 1.2.2 se tiene que $df_{p_0} \equiv df_{p_1} \equiv 0$, y dependiendo de la orientación elegida tendremos $N(p_0) = \vec{a}$ o $N(p_1) = -\vec{a}$.

Falta por tanto comprobar que en el punto en que esto sucede la curvatura de Gauss es no negativa. Supongamos sin pérdida de generalidad que $N(p_0) = \vec{a}$. Y ahora, dado $\vec{v} \in T_{p_0} S$ y $\alpha(t)$ una curva regular como la de antes, definimos $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(\alpha(t)) = \langle \alpha(t), \vec{a} \rangle$. En este caso, tenemos que $h'(0) = 0$, por lo visto anteriormente, y que $h''(0) \leq 0$, pues nos encontramos en un máximo de h . Por tanto, para cada $\vec{v} \in T_{p_0} S$ se tiene

$$0 \geq h''(0) = \langle \alpha''(0), N(p_0) \rangle = \langle \alpha''(0)^\top + \alpha''(0)^\perp, N(p_0) \rangle \tag{2.1}$$

$$= \langle \alpha''(0)^\perp, N(p_0) \rangle = \langle k_n(\vec{v}) \cdot N(p_0), N(p_0) \rangle = k_n(\vec{v}) \tag{2.2}$$

Es decir, que $k_n \leq 0$ para todo $\vec{v} \in T_p S$. En particular, esto se verifica para las direcciones principales, por lo que $k_1, k_2 \leq 0$ y entonces

$$K(p_0) = k_1 k_2 \geq 0$$

y queda probado el resultado. □

Teorema 2.1.2. Dada $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$, entonces se verifica

$$W(S) \geq 4\pi$$

y se da la igualdad si, y solo si, $S = \mathbb{S}^2(r)$.

La siguiente prueba ha sido adaptada de [Per03].

Demostración. Sea S^+ la parte de S con curvatura K no-negativa. Por un lado, tenemos que

$$W(S) = \int_S H^2 dS \geq \int_{S^+} H^2 dS.$$

Además siempre se verifica que

$$H^2 - K = \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 k_2 = \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 - 4k_1 k_2}{4} = \frac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2}{4} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0,$$

por lo que es $H^2 \geq K$, y podemos aumentar la cadena de desigualdades a

$$W(S) = \int_S H^2 dS \geq \int_{S^+} H^2 dS \geq \int_{S^+} K dS.$$

Más aún, podemos ver la integral de la curvatura de una superficie sobre un subconjunto de esta como el área esférica de la imagen de la aplicación de Gauss, contada con multiplicidad. Es decir, que dado $R \subset S$ un subconjunto abierto de S tal que $N|_R : R \rightarrow N(R) \subset \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo entre R y su imagen esférica, se verifica por el teorema del cambio de variable que

$$\int_R K dS = \text{Área}_{\mathbb{S}^2}(N(R)),$$

y si la aplicación $N|_R$ no es inyectiva, entonces el área estará contada con multiplicidad, y será $\int_V K dS \geq \text{Área}_{\mathbb{S}^2}(N(V))$. En nuestro caso, por el lema anterior sabemos que $N|_{S^+}$ es sobreyectiva, pero no tiene por qué ser inyectiva, por lo que tenemos que

$$\int_{S^+} K dS \geq \text{Área}_{\mathbb{S}^2}(N(S^+)) = \text{Área}_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2) = 4\pi.$$

Así, obtenemos que

$$W(S) \geq 4\pi,$$

y queda probada la primera parte del teorema.

Además la igualdad $W(S) = 4\pi$ se dará si, y solo si, $H^2 = K$ en todo S , si, y solo si, $k_1 = k_2$, en todo S . Es decir, que se da la igualdad si, y solo si, la superficie es totalmente umbilical. Pero por el Teorema 1.2.4 las superficies totalmente umbilicales son trozos de plano o de esfera. Como la superficie es compacta, debe ser una esfera completa. \square

Podemos, a modo de ejemplo, calcular directamente el funcional de Willmore de una esfera:

Ejemplo 2.1.3. El funcional de Willmore de la esfera.

Sea $\mathbb{S}^2(r)$ la esfera de radio $r > 0$. Para calcular su funcional de Willmore, podemos parametrizar la esfera mediante la carta (U, X) , siendo

$$U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

y

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \cos \varphi).$$

Esta carta cubre toda la esfera salvo un semimeridiano, por lo que las integrales sobre la esfera y sobre $X(U)$ coinciden. Además, la esfera tiene curvaturas principales constantes e iguales a $\pm \frac{1}{r}$, y se verifica, para todo $p \in \mathbb{S}(r)$, que $H(p)^2 = \frac{1}{r^2}$. Tal y como hicimos en el Ejemplo 1.4.6, el elemento de área de la esfera es

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \sqrt{r^4 \sin^2 \varphi} d\theta d\varphi = r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} W(\mathbb{S}(r)) &= W(X(U)) = \int_{X(U)} H(p)^2 dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2\pi [-\cos \varphi]_0^\pi = 2\pi(1 + 1) = 4\pi. \end{aligned}$$

El caso general presenta mucha mayor dificultad, y de hecho el caso de las superficies con género 1 es el que dio lugar a la famosa conjetura de Willmore. De entre estas superficies, la más simple en la que podemos pensar es el toro de revolución. Podemos, otra vez, calcular el valor del funcional de Willmore para este tipo de superficies, aunque en este caso el valor dependerá de la proporción entre el radio mayor y menor.

Ejemplo 2.1.4. El funcional de Willmore de los toros de revolución.

Sean $0 < r < R$ los radios menor y mayor del toro de revolución, $\mathbb{T}(r, R)$, de manera que puede parametrizarse mediante la carta (U, X) siendo $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ y

$$X(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \theta)(\cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)).$$

En esta ocasión, dos circunferencias quedan excluidas de la parametrización, pero esto no influye en la integral. Pasamos a obtener los coeficientes de la primera fundamental:

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \\ X_\varphi &= -(R + r \cos \theta) \sin \varphi, (R + r \cos \theta) \cos \varphi, 0), \\ E &= r^2, \\ F &= 0, \\ G &= (R + r \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

El elemento de área queda

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = r(R + r \cos \theta) d\theta d\varphi.$$

En esta ocasión, la curvatura media no es constante, y debemos calcularla. Para ello, obtenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental y la calculamos mediante la fórmula

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2},$$

pero antes debemos obtener el vector normal y las derivadas parciales segundas:

$$\begin{aligned} X_\theta \wedge X_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ -(R + r \cos \theta) \sin \varphi & (R + r \cos \theta) \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-r(R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi, -r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \varphi, -r(R + r \cos \theta) \sin \theta) \\ &= -r(R + r \cos \theta) (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta); \\ |X_\theta \wedge X_\varphi| &= r(R + r \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta} = r(R + r \cos \theta). \end{aligned}$$

Por tanto

$$N = \frac{X_\theta \wedge X_\varphi}{|X_\theta \wedge X_\varphi|} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta).$$

Por otro lado, para las derivadas parciales segundas obtenemos

$$\begin{aligned} X_{\theta\theta} &= (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ X_{\theta\varphi} &= (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0), \\ X_{\varphi\varphi} &= -(R + r \cos \theta) \cos \varphi, -(R + r \cos \theta) \sin \varphi, 0). \end{aligned}$$

De este modo, los coeficientes para la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{\theta\theta} \rangle = r, \\ f &= \langle N, X_{\theta\varphi} \rangle = 0, \\ g &= \langle N, X_{\varphi\varphi} \rangle = (R + r \cos \theta) \cos \theta. \end{aligned}$$

Podemos ya obtener la curvatura media, aplicando la fórmula descrita anteriormente,

$$H = \frac{1}{2} \frac{r'(R + r \cos \theta)^{\cancel{2}} + r^{\cancel{2}}(R + r \cos \theta) \cos \theta}{r^{\cancel{2}}(R + r \cos \theta)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2} \frac{R + 2r \cos \theta}{r(R + r \cos \theta)},$$

y su cuadrado es

$$H^2 = \frac{1}{4} \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{r^2 (R + r \cos \theta)^2}.$$

Así, el integrando del funcional de Willmore en este caso viene dado por

$$H^2 dS = \frac{1}{4} \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{r^2 (R + r \cos \theta)^2} r (R + r \cos \theta) d\theta d\varphi = \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{4r (R + r \cos \theta)} d\theta d\varphi.$$

Estamos ya en disposición de calcular el valor buscado

$$\begin{aligned} W(\mathbb{T}(r, R)) &= W(X(U)) = \int_U H^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{4r (R + r \cos \theta)} d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{4r} \int_0^{2\pi} \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{R + r \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{(R + 2r \cos \theta)^2}{R + r \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

En este punto, estamos interesados en el cálculo de esta última integral, que no es trivial. Teniendo en cuenta que $0 < r < R$, llamamos $a = \frac{r}{R}$, de manera que $0 < a < 1$, y podemos expresar la integral anterior como

$$\begin{aligned} W(\mathbb{T}(r, R)) &= \frac{\pi}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{R^2} (R + 2r \cos \theta)^2}{\frac{1}{R^2} (R + r \cos \theta)} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2r} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2a \cos \theta)^2}{\frac{1}{R} (1 + a \cos \theta)} d\theta = \frac{\pi}{2a} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2a \cos \theta)^2}{1 + a \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Para hacer este cálculo, primero vamos a obtener una primitiva del integrando, simplificando un poco la escritura. Comenzamos reescribiendo el integrando llevando los cosenos a tangentes, es decir, teniendo en cuenta que $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$:

$$\int \frac{(1 + 2a \cos \theta)^2}{1 + a \cos \theta} d\theta = \int \frac{\left(1 + 2a \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right)\right)^2}{1 + a \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right)} d\theta. \quad (2.3)$$

En (2.3) podemos aplicar muy fácilmente el cambio de variable de la tangente del ángulo medio:

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{\sec^2(\frac{\theta}{2})}{2} d\theta \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{2}{\sec^2(\frac{\theta}{2})} dt = \frac{2}{t^2 + 1} dt,$$

donde * se debe a que $\tan^2(v) + 1 = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} + 1 = \frac{1}{\cos^2 v} = \sec^2 v$, aplicado a $v = \frac{\theta}{2}$.

Así, (2.3) queda como

$$(2.3) = \int \frac{\left(1 + 2a \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right)^2}{1 + a \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{1}{(1+t^2)^2} (1+t^2 + 2a(1-t^2))^2}{\cancel{1+t^2} (1+t^2 + a(1-t^2)) \cancel{1+t^2}} \frac{2}{\cancel{1+t^2}} dt \quad (2.4)$$

$$= 2 \int \frac{(1+t^2 + 2a(1-t^2))^2}{(1+t^2)^2 (1+t^2 + a(1-t^2))} dt = 2 \int \frac{((2a-1)t^2 - 2a - 1)^2}{(1+t^2)^2 ((1-a)t^2 + 1+a)} dt. \quad (2.5)$$

Notemos en este punto que $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty)$, y nuestro ángulo es $\theta \in (0, 2\pi)$, por lo que debemos cambiar los límites de integración. Sea $g(\theta)$ el integrando del funcional, de forma que $W(\mathbb{T}(r, R)) = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_0^\pi g(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} g(\theta) d\theta$. Aquí, al hacer el cambio, obtendremos que $\int_0^\pi g(\theta) d\theta = \int_0^\infty h(t) dt$, siendo t el nuevo integrando, y que $\int_\pi^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^0 h(t) dt$. Esto lo usaremos más adelante.

En este punto, vamos a hacer una descomposición en fracciones simples, de forma que tenemos

$$\frac{A}{((1-a)t^2 + 1+a)} + \frac{B}{1+t^2} + \frac{C}{(1+t^2)^2} = \frac{((2a-1)t^2 - 2a - 1)^2}{(1+t^2)^2 ((1-a)t^2 + 1+a)},$$

o, equivalentemente

$$A(1+t^2)^2 + B((1-a)t^2 + 1+a)(1+t^2) + C((1-a)t^2 + 1+a) = ((2a-1)t^2 - 2a - 1)^2.$$

Para $t = i$, obtenemos

$$C(-i + 2a + i) = (i - 4a - i)^2 \iff 2aC = 16a^2 \iff C = 8a.$$

Para $t = 0$,

$$A + (1+a)B + 8a(a+1) = (2a+1)^2 \iff A + (a+1)B = -4a^2 - 4a + 1.$$

Y para $t = 1$,

$$4A + 4B + 16a = 4 \iff A + B = 1 - 4a \iff A = 1 - 4a - B.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, obtenemos que

$$1 - 4a - B + aB + 8a = -4a^2 - 4a + 1 \iff B = -4a.$$

Así, sabemos que

$$A = 1.$$

Por lo tanto, nuestra integral queda como

$$(2.5) = 2 \int \left(\frac{1}{(1-a)t^2 + 1+a} - \frac{4a}{t^2 + 1} + \frac{8a}{(t^2 + 1)^2} \right) dt \\ = 2 \int \frac{1}{(1-a)t^2 + 1+a} dt - 8a \int \frac{1}{t^2 + 1} dt + 16a \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Integrales que vamos a resolver por separado. Para la primera, vamos a realizar la sustitución

$$z = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t \rightarrow t = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} z \rightarrow dt = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} dz,$$

donde notamos que $\frac{1-a}{1+a} > 0$. Queda, entonces

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(1-a)t^2 + 1 + a} dt &= \int \frac{1}{(1-a) \left(\frac{1+a}{1-a}\right) z^2 + 1 + a} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} dz \\
 &= \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \int \frac{1}{(1+a)z^2 + 1 + a} dz \\
 &= \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \int \frac{1}{(1+a)(z^2 + 1)} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a)}} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \arctan(z) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t\right).
 \end{aligned}$$

La segunda integral es, directamente, la función arco tangente de t :

$$\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t.$$

Para la tercera integral, utilizando la técnica de reducción

$$\int \frac{1}{(At^2 + B)^n} dt = \frac{2n-3}{2B(n-1)} \int \frac{1}{(At^2 + B)^{n-1}} dt + \frac{t}{2B(n-1)(At^2 + B)^{n-1}},$$

para $A = B = 1$ y $n = 2$, obtenemos la solución a nuestro problema:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt + \frac{t}{2(t^2 + 1)} \\
 &= \frac{1}{2} \arctan t + \frac{t}{2(t^2 + 1)}.
 \end{aligned}$$

Juntando toda esta información, obtenemos que la antiderivada buscada es

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t\right) - \cancel{8a \cdot \arctan t} + 16a \left(\frac{1}{2} \arctan t + \frac{t}{2(t^2 + 1)}\right) + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t\right) + \frac{8at}{t^2 + 1} + C.
 \end{aligned}$$

Y solo queda calcular la integral definida para obtener el funcional de Willmore, recordando la nota

anterior:

$$\begin{aligned}
 W(\mathbb{T}(r, R)) &= \frac{\pi}{2a} \left[\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t \right) + \frac{8at}{t^2+1} \right]_0^\infty \\
 &\quad + \frac{\pi}{2a} \left[\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t \right) + \frac{8at}{t^2+1} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{\pi}{2a} \left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{\pi}{2a} \left(0 - \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{\pi}{2a} \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \\
 &= \frac{\pi^2}{a\sqrt{1-a^2}}.
 \end{aligned}$$

Como adelantábamos, el valor del funcional de Willmore de $\mathbb{T}(r, R)$ depende de la proporción $a = \frac{r}{R}$, por lo que ahora podemos plantearnos si existe una proporción entre ambos radios que nos dé el «mejor» toro de revolución, en el sentido de que es el que minimiza el funcional de Willmore:

Proposición 2.1.5. *De entre los toros de revolución, $\mathbb{T}(r, R)$, $0 < r < R \in \mathbb{R}$, aquellos que minimizan el funcional de Willmore son los que verifican $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Además, el valor de este mínimo es $2\pi^2$.*

Demostración. Siguiendo con el resultado obtenido en el ejemplo anterior, definimos la función

$$f(a) = \frac{\pi^2}{a\sqrt{1-a^2}}, \quad 0 < a < 1,$$

y vamos a minimizarla.

Primero nos damos cuenta de que el funcional de Willmore de un toro puede tomar valores arbitrariamente grandes, simplemente variando el factor de proporcionalidad a . Como hemos visto, el funcional de Willmore de un toro de revolución solo depende de $a = \frac{r}{R}$ y viene dado por la expresión

$$W(\mathbb{T}(r, R)) = f(a) = \frac{\pi^2}{a\sqrt{1-a^2}},$$

por tanto, se tiene

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) = \frac{\pi^2}{0^+} = \infty, \tag{2.6}$$

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} f(a) = \frac{\pi^2}{0^+} = \infty. \tag{2.7}$$

Esto quiere decir, que si encontramos un único mínimo local, este debe ser, de hecho, un mínimo global.

Así, pasamos al cálculo de su derivada

$$f'(a) = \pi^2 \frac{\sqrt{1-a^2} + a \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}}}{a^2(1-a^2)} = \pi^2 \frac{1-2a^2}{a^2(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}.$$

Este valor es nulo si, y solo si, lo es el numerador:

$$\pi^2 (1 - 2a^2) = 0 \iff 2a^2 = 1 \iff a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Recordemos que $0 < a < 1$, por lo que tomamos la raíz positiva.

Par comprobar que, efectivamente, es un mínimo, obtenemos la segunda derivada

$$\begin{aligned} f''(a) &= \pi^2 \frac{-4a \left((a^2 - a^4) \sqrt{1 - a^2} \right) + (1 - 2a^2) \left((2a - 4a^3) \sqrt{1 - a^2} + (a^2 - a^4) \frac{-2a}{\sqrt{1 - a^2}} \right)}{a^4 (1 - a^2)^3} \\ &= \pi^2 \frac{-4a^3 (1 - a^2)^2 + (1 - 2a^2) (2a (1 - 2a^2) (1 - a^2) - 2a^3 (1 - a^2))}{a^4 (1 - a^2)^3} \\ &= \pi^2 \frac{-4a^3 (1 - a^2)^2 + 2a (1 - 2a^2)^2 (1 - a^2) - 2a^3 (1 - 2a^2) (1 - a^2)}{a^4 (1 - a^2)^3}. \end{aligned}$$

Calculamos el valor en $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \pi^2 \frac{-4\sqrt{8} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \left(1 - 2\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2\sqrt{8} \left(1 - 2\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \pi^2 \frac{-4\sqrt{8} \frac{1}{4}^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} \frac{1}{8}} = -\pi^2 \cdot 32\sqrt{8} < 0. \end{aligned}$$

Por lo que, efectivamente, es un mínimo. Por último, obtenemos su valor exacto:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = 2\pi^2.$$

□

Todos estos cálculos los realizó Willmore, pero él fue más allá, calculando el funcional de Willmore de lo que se conoce como un toro generalizado, en [Wil96].

Como última nota a esta sección, notar que por las ecuaciones (2.6) y (2.7), sabemos que usando únicamente la familia de los toros de revolución, podemos encontrar superficies, S , con funcional de Willmore, $W(S)$, tan grande como queramos.

2.2. La conjetura de Willmore.

En esta sección continuamos con el desarrollo del funcional de Willmore sobre los toros. Ahora vamos a ampliar el horizonte en que nos encontramos tratando el caso de los toros generalizados. Este conjunto de superficies es el que viene dado al tomar un tubo alrededor de una curva cerrada, siendo el toro usual de revolución una particularización de este tipo de superficies, donde la curva base tomada es una circunferencia. Este tipo de superficies, no obstante, aún no cubre todas las superficies que son difeomorfas a un toro. Aún así, cuando Willmore consiguió establecer como cota inferior de su funcional entre los toros de revolución el valor que hemos obtenido anteriormente, $2\pi^2$, fue que introdujo su famosa conjetura. Así pues, veamos cómo puede realizarse esta acotación en un contexto

algo más general. Willmore llegó más tarde a este mismo resultado, como puede verse en [Wil96], lo que reforzaba su confianza en la veracidad de su conjetura.

El contenido que se explica a continuación ha sido adaptado de [Mar16]. Formalizando lo anterior, un **toro generalizado** es la superficie obtenida de la siguiente forma: disponemos de una curva regular y cerrada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y tomamos el tubo formado tomando, para cada $t \in I$, una circunferencia en el plano normal a $\alpha(t)$, con centro $\alpha(t)$ y radio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que el tubo obtenido sea una superficie regular. La existencia de tal ε la garantiza el hecho de que α puede verse como un conjunto compacto. Nosotros vamos a tomar α parametrizada por la longitud de arco, para simplificar la obtención de la parametrización del toro. Notemos que esto no supone pérdida de generalidad, pues cualquier curva regular puede expresarse como una curva parametrizada por la longitud de arco.

Ejemplo 2.2.1. Como ejemplo, vemos el toro generalizado¹ de la Figura 2.1, generado por la curva $C(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t))$ y con radio del tubo $\varepsilon = 0,2$.

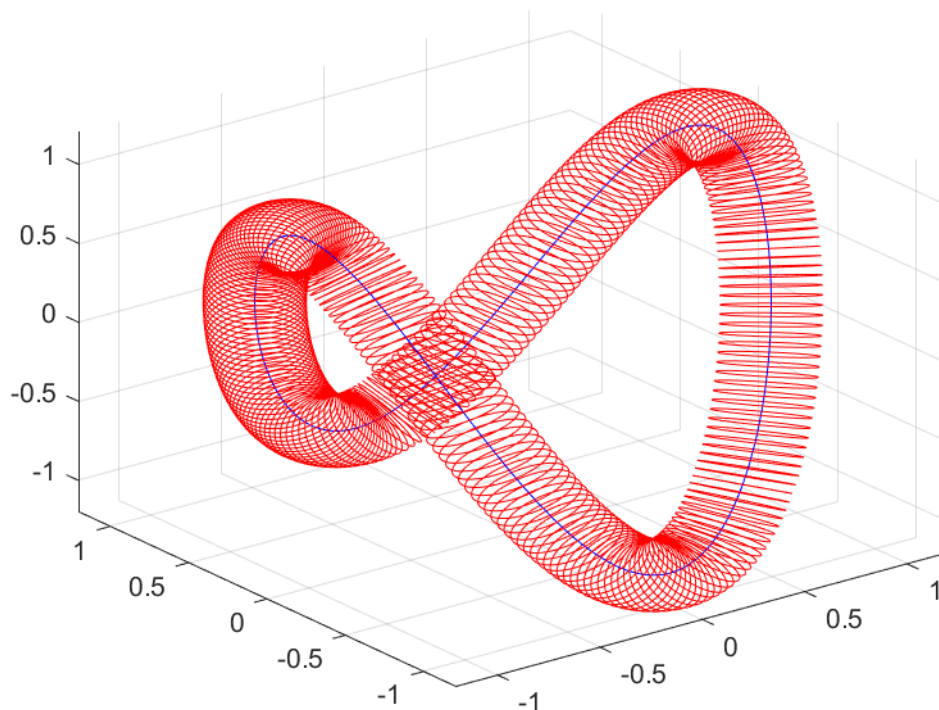


Figura 2.1: Toro generalizado generado por $C(t)$ y radio del tubo $\varepsilon = 0,2$.

En azul se identifica la curva $C(t)$ y en rojo podemos ver la superficie formada por tomar circunferencias de centro $C(t)$ y radio $\varepsilon = 0,2$, para cada t . El programa mediante el que se ha generado esta figura puede consultarse en el Apéndice A.

Así, sea $\alpha : I = [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y cerrada, con curvatura $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. Dado $s \in I$, disponemos del triedro de Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$, que forma una base de \mathbb{R}^3 para cada s . El plano normal a la curva en $\alpha(s)$ es $\text{span}\{\vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$, y estos vectores son ortonormales, por lo que para cada $s \in I$, podemos parametrizar la circunferencia de centro $\alpha(s)$ y radio ε como $C_s(\theta) = \alpha(s) + \varepsilon \cos \theta \cdot \vec{n}(s) + \varepsilon \sin \theta \cdot \vec{b}(s)$. De esta forma, asumiendo que el ε ha sido escogido de manera que la superficie sea regular (no haya autointersecciones) entonces

¹Gráfica obtenida mediante un programa propio desarrollado en Matlab.

nuestra superficie puede ser parametrizada (salvo una de las circunferencias y una línea a lo largo del tubo, pero, como viene sucediendo, esto no afecta a las integrales) tomando $U = (0, \ell) \times (0, 2\pi)$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} X(s, \theta) &= C_s(\theta) \\ &= \alpha(s) + \varepsilon \cos \theta \cdot \vec{n}(s) + \varepsilon \sin \theta \cdot \vec{b}(s). \end{aligned}$$

Para poder obtener el funcional de Willmore, debemos calcular primero las derivadas parciales de X :

$$\begin{aligned} X_s(s, \theta) &= \vec{t}(s) + \varepsilon \cos \theta \cdot \vec{n}'(s) + \varepsilon \sin \theta \cdot \vec{b}'(s) \\ &= \vec{t}(s) - \varepsilon \cos \theta \left(k(s) \cdot \vec{t}(s) + \tau(s) \cdot \vec{b}(s) \right) + \varepsilon \sin \theta \left(\tau(s) \cdot \vec{n}(s) \right) \\ &= (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) \cdot \vec{t}(s) + \varepsilon \tau(s) \sin \theta \cdot \vec{n}(s) - \varepsilon \tau(s) \cos \theta \cdot \vec{b}(s), \\ X_\theta(s, \theta) &= -\varepsilon \sin \theta \cdot \vec{n}(s) + \varepsilon \cos \theta \cdot \vec{b}(s). \end{aligned}$$

Vemos así que los coeficientes de la primera fundamental quedan

$$\begin{aligned} E &= (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2 + \varepsilon^2 \tau(s)^2 \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \tau(s)^2 \cos^2 \theta = (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2 + \varepsilon^2 \tau(s)^2, \\ F &= -\varepsilon^2 \tau(s) \sin^2 \theta - \varepsilon^2 \tau(s) \cos^2 \theta = -\varepsilon^2 \tau(s), \\ G &= \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Podemos ya calcular el elemento de área de nuestra parametrización

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG - F^2} ds d\theta = \sqrt{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2 + \varepsilon^4 \tau(s)^2 - \varepsilon^4 \tau(s)^2} ds d\theta \\ &= \varepsilon |1 - \varepsilon k(s) \cos \theta| ds d\theta. \end{aligned}$$

A continuación, pasamos al cálculo del vector normal a la superficie, $N(s, \theta)$. Comenzamos por calcular $X_s \wedge X_\theta$:

$$\begin{aligned} X_s \wedge X_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{t}(s) & \vec{n}(s) & \vec{b}(s) \\ 1 - \varepsilon k(s) \cos \theta & \varepsilon \tau(s) \sin \theta & -\varepsilon \tau(s) \cos \theta \\ 0 & -\varepsilon \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \left(\varepsilon^2 \tau(s) \sin \theta \cos \theta - \varepsilon^2 \tau(s) \sin \theta \cos \theta \right) \cdot \vec{t}(s) + \varepsilon \cos \theta (\varepsilon k(s) \cos \theta - 1) \cdot \vec{n}(s) \\ &\quad + \varepsilon \sin \theta (\varepsilon k(s) \cos \theta - 1) \cdot \vec{b}(s) \\ &= -(1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) \cdot \left(\varepsilon \cos \theta \cdot \vec{n}(s) + \varepsilon \sin \theta \cdot \vec{b}(s) \right), \end{aligned}$$

cuyo módulo es

$$\|X_s \wedge X_\theta\| = (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) \varepsilon.$$

Nótese, en este punto, que, para que la superficie sea regular, debe suceder que $\|X_s \wedge X_\theta\| > 0$, por lo que se debe elegir $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon k(s) \cos \theta > 0$ para todo $s \in I$. En particular, basta con elegir $0 < \varepsilon k(s) < 1$, es decir, $\varepsilon < \frac{1}{\max_I k}$. Esta elección siempre puede hacerse, puesto que $k(s)$ alcanza un máximo por estar definida sobre una curva cerrada (y por tanto compacta).

Así, obtenemos el normal, que podemos tomarlo en la dirección opuesta a la que acabamos de obtener, para deshacernos del signo negativo:

$$N(s, \theta) = \cos \theta \cdot \vec{n}(s) + \sin \theta \cdot \vec{b}(s).$$

Pasamos ahora al cálculo de las derivadas parciales segundas:

$$\begin{aligned}
X_{ss} &= (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) \cdot \vec{t}'(s) - \varepsilon k'(s) \cos \theta \cdot \vec{t}(s) \\
&\quad + \varepsilon \tau(s) \sin \theta \cdot \vec{n}'(s) + \varepsilon \tau'(s) \sin \theta \cdot \vec{n}(s) \\
&\quad - \varepsilon \tau(s) \cos \theta \cdot \vec{b}'(s) - \varepsilon \tau'(s) \cos \theta \cdot \vec{b}(s) \\
&= k(s) (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) \cdot \vec{n}(s) - \varepsilon k'(s) \cos \theta \cdot \vec{t}(s) \\
&\quad - \varepsilon \tau(s) \sin \theta \left(k(s) \cdot \vec{t}(s) + \tau(s) \cdot \vec{b}(s) \right) + \varepsilon \tau'(s) \sin \theta \cdot \vec{n}(s) \\
&\quad - \varepsilon \tau(s)^2 \cos \theta \cdot \vec{n}(s) - \varepsilon \tau'(s) \cos \theta \cdot \vec{b}(s) \\
&= - \left(\varepsilon k(s) \tau(s) \sin \theta + \varepsilon k'(s) \cos \theta \right) \cdot \vec{t}(s) \\
&\quad + \left(k(s) (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) - \varepsilon \tau(s)^2 \cos \theta + \varepsilon \tau'(s) \sin \theta \right) \cdot \vec{n}(s) \\
&\quad - \left(\varepsilon \tau'(s) \cos \theta + \varepsilon \tau(s)^2 \sin \theta \right) \cdot \vec{b}(s),
\end{aligned}$$

y de forma análoga obtenemos

$$\begin{aligned}
X_{s\theta} &= \varepsilon k(s) \sin \theta \cdot \vec{t}'(s) + \varepsilon \tau(s) \cos \theta \cdot \vec{n}'(s) + \varepsilon \tau(s) \sin \theta \cdot \vec{b}'(s), \\
X_{\theta\theta} &= -\varepsilon \cos \theta \cdot \vec{n}(s) - \varepsilon \sin \theta \cdot \vec{b}(s).
\end{aligned}$$

Podemos ya calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, X_{ss} \rangle = k(s) \cos \theta (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) - \varepsilon \tau(s)^2 \cos^2 \theta + \cancel{\varepsilon \tau'(s) \sin \theta \cos \theta} \\
&\quad - \cancel{\varepsilon \tau'(s) \cos \theta \sin \theta} - \varepsilon \tau(s)^2 \sin^2 \theta \\
&= k(s) \cos \theta (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) - \varepsilon \tau(s)^2, \\
f &= \langle N, X_{s\theta} \rangle = \varepsilon \tau(s), \\
g &= \langle N, X_{\theta\theta} \rangle = -\varepsilon,
\end{aligned}$$

para ahora proceder a obtener la curvatura media de nuestro toro generalizado:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{k(s) \varepsilon \cos \theta (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta) - \varepsilon^3 \tau(s)^2 - \varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2 - \varepsilon^3 \tau(s)^2 + 2\varepsilon^3 \tau(s)^2}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{k(s) \varepsilon \cos \theta - (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)}{\varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} \\
&= \frac{2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1}{2\varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)}.
\end{aligned}$$

De este modo, el integrando del funcional de Willmore queda como sigue:

$$\begin{aligned}
H^2 dS &= \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon^2 (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)^2} \varepsilon |1 - \varepsilon k(s) \cos \theta| ds d\theta \\
&= \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} ds d\theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el funcional de Willmore de un toro generalizado, llamándolo $S_{\alpha, \varepsilon}$, es

$$\begin{aligned}
W(S_{\alpha, \varepsilon}) &= \int_{S_{\alpha, \varepsilon}} H^2 dS = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} ds d\theta \\
&= \int_0^\ell \left(\int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon (1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} d\theta \right) ds.
\end{aligned}$$

En este momento vamos a comenzar por calcular el valor del interior de los paréntesis:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon(1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} d\theta = \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{1 - \varepsilon k(s) \cos \theta} d\theta,$$

donde llamamos $a = -\varepsilon k(s)$, que es un valor fijo, ya que en esta integral solo variamos θ . Queda, de esta forma:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon(1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} d\theta = \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2a \cos \theta)^2}{1 + a \cos \theta} d\theta,$$

integral que es exactamente igual a la que calculamos al obtener el funcional de Willmore para el toro de revolución, por lo que el resultado se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que en el Ejemplo 2.1.4, y es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(2\varepsilon k(s) \cos \theta - 1)^2}{4\varepsilon(1 - \varepsilon k(s) \cos \theta)} d\theta &= \frac{1}{4\varepsilon} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \\ &= \frac{\pi}{2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2(s)}}. \end{aligned}$$

Ahora solo resta obtener el valor de

$$W(S_{\alpha, \varepsilon}) = \int_0^\ell \frac{\pi}{2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2(s)}} ds = \frac{\pi}{2} \int_0^\ell \frac{1}{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2(s)}} ds. \quad (2.8)$$

Por ser α una curva regular y tal que permite la definición del triedro de Frenet, tiene sentido multiplicar y dividir por $|k(s)| > 0$, obteniendo

$$(2.8) = \frac{\pi}{2} \int_0^\ell \frac{|k(s)|}{\varepsilon |k(s)| \sqrt{1 - \varepsilon^2 k^2(s)}} ds,$$

donde llamamos $b(s) = \varepsilon |k(s)|$, y tenemos

$$(2.8) = \frac{\pi}{2} \int_0^\ell \frac{|k(s)|}{b(s) \sqrt{1 - b^2(s)}} ds.$$

Si definimos $f(b) = \frac{1}{b\sqrt{1-b^2}}$, con $0 < b < 1$, entonces tenemos que

$$(2.8) = \frac{\pi}{2} \int_0^\ell f(b(s)) \cdot |k(s)| ds,$$

y si encontramos un mínimo de f , $m := \min f$, entonces podremos acotar (2.8) mediante

$$\begin{aligned} (2.8) &= \frac{\pi}{2} \int_0^\ell f(b(s)) \cdot |k(s)| ds \\ &\geq \frac{\pi}{2} \int_0^\ell m \cdot |k(s)| ds \\ &= \frac{\pi m}{2} \int_0^\ell |k(s)| ds. \end{aligned}$$

De hecho, sabemos que f tiene un mínimo absoluto para $0 < b < 1$, pues lo vimos al calcular el toro con funcional de Willmore mínimo (Proposición 2.1.5). Esto sirve puesto que $0 < b(s) < 1$, como

observamos al obtener el módulo de $\|X_s \wedge X_\theta\|$, y entonces el mínimo que obtenemos es $m = \min f = 2$. Es decir, que

$$(2.8) \geq \pi \int_0^\ell |k(s)| ds.$$

Aquí introducimos el Teorema de Fenchel, cuya demostración puede consultarse en [Hor71].

Lema 2.2.2. Teorema de Fenchel

Dada una curva cerrada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $k(t)$ se verifica

$$\int_I |k(t)| dt \geq 2\pi,$$

y se da la igualdad si, y solo si, la curva es una curva plana y convexa.

Entonces, por el teorema de Fenchel, tenemos que $\int_0^\ell |k(s)| ds \geq 2\pi$, luego

$$W(S_{\alpha,\varepsilon}) \geq \pi \int_0^\ell |k(s)| ds \geq 2\pi^2,$$

que es, casualmente, el valor mínimo del funcional de Willmore calculado anteriormente para los toros de revolución. Es decir, que hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 2.2.3. El funcional de Willmore cualquier toro generalizado $S_{\alpha,\varepsilon}$ es mayor o igual que el funcional de Willmore del toro de revolución $\mathbb{T}(r, \sqrt{2}r) = S_{\mathbb{S}^1(\sqrt{2}r), r}$.

Este resultado es el que hizo a Willmore reforzar su idea de que esta cota no es solo válida para los toros generalizados, sino para los toros topológicos. Es decir, para cualquier superficie de género 1. Esta creencia fue conjeturada previamente en su famoso artículo [Wil65] y terminó por ser un resultado importante en geometría diferencial y cálculo variacional, conocida por **Conjetura de Willmore**.

Conjetura 2.2.4. Conjetura de Willmore (1965)

Si $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$ tiene género 1, $g(S) = 1$, entonces

$$W(S) \geq 2\pi^2,$$

y se da la igualdad si, y solo si, la superficie S es el toro de revolución $\mathbb{T}(r, \sqrt{2}r)$.

La demostración de esta conjetura no llegó hasta el año 2014, de la mano de Marques y Neves. Para ello, utilizaron modernas técnicas de geometría diferencial y el lector interesado puede consultar su complejo artículo de casi cien páginas, [MN14a], en el que se detalla la prueba completa de la conjetura. Estos mismos autores tienen un excelente artículo en el que explican la historia de la conjetura, las ideas tras su demostración y los siguientes pasos a seguir para avanzar en el estudio del funcional de Willmore, como puede ser determinar la superficie que minimiza el funcional de Willmore para superficies de género mayor que 1 o generalizar los resultados conocidos actualmente para espacios en mayor dimensión que el espacio euclídeo tridimensional. Es evidente que todas estas cuestiones quedan lejos de los objetivos de este texto, pero este último artículo puede ser muy interesante para alguien que esté disfrutando del trabajo presente. El mencionado artículo es [MN14b].

Capítulo 3

Invarianza conforme del funcional de Willmore

En este tercer capítulo vamos a explorar una propiedad interesante del funcional de Willmore, y es que este es invariante bajo transformaciones conformes. Este concepto se corresponde con la siguiente definición:

Definición 3.0.1. Sean $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ abiertos y conexos. Una aplicación $\Phi : W_1 \rightarrow W_2$ de clase C^∞ es una **aplicación conforme** si, para todo $p \in W_1$, se tiene que $d\Phi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal conforme entre espacios vectoriales. Esto es, existe una función diferenciable $\lambda : W_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que

$$\langle d\Phi_p(\vec{v}), d\Phi_p(\vec{w}) \rangle = \lambda(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

para cualesquiera $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. La función λ se denomina **factor conforme**.

Observación 3.0.2. Las aplicaciones conformes son difeomorfismos locales.

Demostración. Vamos a usar que una aplicación $F : W_1 \rightarrow W_2$ es un difeomorfismo local si, y solo si, dF_p es un isomorfismo vectorial, para todo $p \in W_1$. Así, dada una aplicación conforme Φ calculemos el núcleo de $d\Phi_p$, $\ker(d\Phi_p)$:

Si $d\Phi_p(\vec{v}) = 0$, entonces

$$0 = \|d\Phi_p(\vec{v})\|^2 = \langle d\Phi_p(\vec{v}), d\Phi_p(\vec{v}) \rangle = \lambda(p)^2 \|\vec{v}\|^2$$

y como $\lambda(p) \neq 0$, para todo p , entonces debe ser $\vec{v} = \vec{0}$. Es decir, $\ker(d\Phi_p) = \{\vec{0}\}$, $d\Phi_p$ es un isomorfismo vectorial y Φ es un difeomorfismo local. \square

3.1. Los tipos de aplicaciones conformes

Vamos ahora a ver algunos tipos de aplicaciones conformes que, en última instancia, resultará que en realidad todas las aplicaciones conformes se reducen a estas o a una combinación de las mismas (en el sentido de la composición de aplicaciones). Estas aplicaciones son los movimientos rígidos, las homotecias y las inversiones; y el teorema que asegura el resultado mencionado es debido a Liouville.

Definición 3.1.1. Una aplicación $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ es un **movimiento rígido** si es de la forma

$$M(p) = Ap + b$$

donde $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal y $b \in \mathbb{R}^3$ es el vector de traslación. Es decir, un movimiento rígido consiste en rotar y desplazar el espacio, sin aplicar ningún tipo de deformación.

Proposición 3.1.2. *Los movimientos rígidos son aplicaciones conformes, con factor conforme constantemente igual a 1.*

Demostración. Sea $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y, dado $p \in \mathbb{R}^3$, calculemos $dM_p(\vec{v})$ para $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Para ello, tomamos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W_1$ una curva cualquiera, que verifique $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$. Entonces

$$dM_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} M(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A\alpha(t) + b) = A \alpha'(t) \Big|_{t=0} = A\alpha'(0) = A\vec{v}.$$

Por tanto, dados $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\langle dM_p(\vec{v}), dM_p(\vec{w}) \rangle = \langle A\vec{v}, A\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A^T A \vec{w} \rangle \stackrel{A \text{ ortogonal}}{=} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle,$$

y vemos como M es una aplicación conforme con factor conforme $\lambda(p) \equiv 1$. □

Definición 3.1.3. Una aplicación $I : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de clase C^∞ es una **inversión** de centro 0 y radio r si se escribe como

$$I(p) = r^2 \frac{p}{\|p\|^2}.$$

De alguna forma, es como fijar la esfera de radio r e “intercambiar” su interior y su exterior.

Proposición 3.1.4. *Las inversiones de centro 0 y radio r son aplicaciones conformes, con factor conforme $\lambda(p) = \frac{r^2}{\|p\|^2}$.*

Demostración. Sea I la inversión, que se escribe como

$$I(p) = r^2 \frac{p}{\|p\|^2}.$$

Vamos a calcular su diferencial. Sea $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces la diferencial es I es

$$dI_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\alpha(t)),$$

para $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$. La composición queda como

$$I(\alpha(t)) = r^2 \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|^2},$$

y su derivada, entonces, es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) &= r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\alpha(t)\|^2} \right) \alpha(t) + \frac{r^2}{\|\alpha(t)\|^2} \alpha'(t) \\ &= r^2 \frac{-2 \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|^4} \alpha(t) + \frac{r^2}{\|\alpha(t)\|^2} \alpha'(t). \end{aligned}$$

Queda evaluar esta expresión para $t = 0$:

$$dI_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} I(\alpha(t)) = -2 \frac{r^2 \langle p, \vec{v} \rangle}{\|p\|^4} p + \frac{r^2}{\|p\|^2} \vec{v} = \frac{r^2}{\|p\|^2} \left(\vec{v} - \frac{2 \langle p, \vec{v} \rangle}{\|p\|^2} p \right).$$

A continuación vamos a calcular el producto escalar de la diferencial sobre dos vectores distintos. Sean $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} \langle dI_p(\vec{v}), dI_p(\vec{w}) \rangle &= \frac{r^4}{\|p\|^4} \left[\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \frac{2 \langle p, \vec{w} \rangle}{\|p\|^2} \langle p, \vec{v} \rangle - \frac{2 \langle p, \vec{v} \rangle}{\|p\|^2} \langle p, \vec{w} \rangle + \frac{4 \langle p, \vec{v} \rangle \langle p, \vec{w} \rangle}{\|p\|^4} \right] \\ &= \frac{r^4}{\|p\|^4} \left[\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \frac{4 \langle p, \vec{w} \rangle \langle p, \vec{v} \rangle}{\|p\|^2} + \frac{4 \langle p, \vec{v} \rangle \langle p, \vec{w} \rangle}{\|p\|^2} \right] \\ &= \frac{r^4}{\|p\|^4} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, I es una aplicación conforme con factor conforme $\lambda(p) = \frac{r^2}{\|p\|^2}$. □

Probado este resultado, solo nos queda uno de los tipos de aplicaciones de los que adelantábamos que configuraban todas las aplicaciones conformes posibles del espacio euclídeo, las homotecias.

Definición 3.1.5. Una aplicación $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ es una **homotecia** de razón $\lambda \in \mathbb{R}$ si puede escribirse como

$$H(p) = \lambda p,$$

para todo $p \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 3.1.6. *Las homotecias son aplicaciones conformes con factor conforme constante e igual a la razón λ de la homotecia.*

Demostración. Sea H una homotecia de razón λ . Vamos a calcular, como en los casos anteriores, la diferencial de H en $p \in \mathbb{R}^3$ para $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. $\alpha(t)$ será una curva en \mathbb{R}^3 verificando $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$, tal y como venimos haciendo. De esta forma, tenemos que

$$dH_p(\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (H(\alpha(t))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda \alpha(t)) = \lambda \alpha'(0) = \lambda \vec{v}.$$

Por lo tanto, para $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, se verifica

$$\langle dH_p(\vec{v}), dH_p(\vec{w}) \rangle = \lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

y H es una aplicación conforme, con factor conforme constantemente igual a λ , tal y como queríamos demostrar. □

El siguiente teorema es importante para poder probar el resultado central de este capítulo, pues reducirá el problema de demostrar la invarianza del funcional W bajo una transformación conforme arbitraria de \mathbb{R}^3 a comprobar la invarianza bajo los tres tipos de aplicaciones vistos hasta ahora.

Teorema 3.1.7. Teorema de Liouville

Toda aplicación conforme e inyectiva $\Phi : W_1 \rightarrow W_2$, siendo $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ abiertos, es composición de movimientos rígidos, inversiones y homotecias.

La demostración de este resultado se encuentra, por ejemplo, en [\[Soe11\]](#).

3.2. La invarianza conforme del funcional de Willmore

Ya estamos en condiciones de probar el resultado que da sentido a este capítulo del trabajo, y es el siguiente:

Teorema 3.2.1. *Sea $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$, y sea Φ una aplicación conforme e inyectiva. Entonces, $S' = \Phi(S)$ está en $SCO(\mathbb{R}^3)$ y $W(S) = W(S')$.*

Demostración. Lo primero es darnos cuenta de que, dado que la superficie es compacta, entonces podemos cubrirla con una cantidad finita de cartas, $\{(U_i, X_i)\}_{i=1}^n$, de tal forma que $\bigcap_{i=1}^n X_i(U_i) = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^n X_i(U_i) = S$ y $\partial \bigcup_{i=1}^n X_i(U_i)$ tiene medida nula. Por tanto, basta probar que el funcional de Willmore se conserva para una parametrización dada.

Para la primera afirmación, notamos que, por ser Φ una aplicación conforme, entonces es un difeomorfismo local por la Observación 3.0.2. Como, además, es inyectiva, entonces es un difeomorfismo global, y el Teorema 1.3.6 nos asegura que $S' = \Phi(S)$ es también una superficie regular. Además, S' es compacta por ser imagen mediante una aplicación continua de una superficie compacta. De hecho, S y S' son difeomorfas.

Para ver la invarianza del funcional de Willmore, como ya se ha mencionado, por las Proposiciones 3.1.2, 3.1.4, 3.1.6 y el teorema de Liouville, Teorema 3.1.7, basta ver la invarianza de W bajo movimientos rígidos, inversiones y homotecias.

Comencemos por los movimientos rígidos: sea M un movimiento rígido de la forma $M(p) = Ap + b$ y consideremos $m = M|_S$, $S' = M(S) = m(S)$. Sea (U, X) una carta de S , de forma que $(U, m \circ X)$ es una carta de S' . Vamos a llamar $X' := m \circ X$, de forma que $X'(u, v) = A \cdot X(u, v) + b$. Se tiene, entonces

$$\frac{\partial X'}{\partial u} = A \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial X'}{\partial v} = A \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Ahora calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental de S' :

$$E' = \left\langle \frac{\partial X'}{\partial u}, \frac{\partial X'}{\partial u} \right\rangle = \left\langle A \frac{\partial X}{\partial u}, A \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, A^T A \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = E,$$

y, de igual forma,

$$F' = F \quad \text{y} \quad G' = G.$$

Podemos ahora calcular el elemento de área de S' , que es claramente el mismo que el de S :

$$dS' = \sqrt{E'G' - F'^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv = dS.$$

Ahora vamos a calcular el normal a S' , N' , para obtener los coeficientes de la segunda forma fundamental, y poder calcular la curvatura media de S' , H' . Así, para $(u, v) \in U$, tenemos

$$\begin{aligned} N'(X'(u, v)) &= \frac{\frac{\partial X'}{\partial u} \wedge \frac{\partial X'}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X'}{\partial u} \wedge \frac{\partial X'}{\partial v} \right\|} = \frac{A \frac{\partial X}{\partial u} \wedge A \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| A \frac{\partial X}{\partial u} \wedge A \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = \frac{(\det A) (A^{-1})^T \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right)}{\left\| (\det A) (A^{-1})^T \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right\|}} \\ &= \frac{\pm 1 \cdot (A^T)^T \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right)}{\left\| \pm 1 \cdot (A^T)^T \left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right\|} = \pm A \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|} = \pm A \cdot N(u, v). \end{aligned}$$

Calculamos a continuación las derivadas parciales segundas de X' . Para simplificar la notación, de ahora en adelante escribiremos un subíndice indicador de la parcial tomada. Se tiene, entonces, que

$$X'_{uu} = (X'_u)_u = (AX_u)_u = AX_{uu}, \quad X'_{uv} = AX_{uv} \quad \text{y} \quad X'_{vv} = AX_{vv},$$

y ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental de S' :

$$e' = \langle N', X'_{uu} \rangle = \langle \pm A \cdot N, AX_{uu} \rangle = \pm \langle N, X_{uu} \rangle = \pm e,$$

y de la misma forma tenemos

$$f' = \pm f, \quad g' = \pm g.$$

Notemos que se tendrá para los tres casos el mismo signo del \pm , dependiendo de si $\det A = 1$ o $\det A = -1$.

Si $\det A = 1$, entonces quedará

$$H'(X'(u, v)) = \frac{1}{2} \frac{e'G' + g'E' - 2f'F'}{E'G' - F'^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = H(X(u, v))$$

y si $\det A = -1$, entonces obtenemos $H' = -H$. En ambos casos, obtenemos que $(H')^2 = H^2$.

Juntando todo esto, llegamos al resultado buscado, pues

$$W(X'(U)) = \int_{X(U)} H'^2 dS' = \int_{X(U)} H^2 dS = W(X(U)).$$

Así, W es invariante bajo movimientos rígidos.

El caso de las homotecias es muy similar, veámoslo siguiendo el mismo procedimiento. Sea H una homotecia de razón λ de la forma $H(p) = \lambda p$ y consideremos $h = H|_S$, $S' = H(S) = h(S)$. Sea (U, X) una carta de S , de forma que $(U, h \circ X)$ es una carta de S' . Vamos a llamar $X' := h \circ X$, de forma que $X'(u, v) = \lambda \cdot X(u, v)$. Se tiene, entonces

$$X'_u = \lambda X_u \quad \text{y} \quad X'_v = \lambda X_v.$$

Además,

$$\begin{aligned} E' &= \langle X'_u, X'_u \rangle = \lambda^2 \langle X_u, X_u \rangle = \lambda^2 E, \\ F' &= \langle X'_u, X'_v \rangle = \lambda^2 F, \\ G' &= \langle X'_v, X'_v \rangle = \lambda^2 G, \end{aligned}$$

y para el elemento de área queda

$$dS' = \sqrt{E'G' - F'^2} dudv = \lambda^2 \sqrt{EG - F^2} = \lambda^2 dS.$$

El vector normal a la superficie S' es

$$N'(X'(u, v)) = \frac{X'_u \wedge X'_v}{\|X'_u \wedge X'_v\|} = \frac{\lambda X_u \wedge \lambda X_v}{\|\lambda X_u \wedge \lambda X_v\|} = \frac{\lambda^2 (X_u \wedge X_v)}{\|\lambda^2 (X_u \wedge X_v)\|} = N(X(u, v)),$$

y las derivadas parciales segundas

$$X'_{uu} = (X'_u)_u = (\lambda X_u)_u = \lambda X_{uu}, \quad X'_{uv} = \lambda X_{uv}, \quad X'_{vv} = \lambda X_{vv}.$$

Podemos ahora obtener los coeficientes de la segunda forma fundamental, como antes

$$\begin{aligned} e' &= \langle N', X'_{uu} \rangle = \langle N, \lambda X_{uu} \rangle = \lambda \langle N, X_{uu} \rangle = \lambda e, \\ f' &= \lambda f, \\ g' &= \lambda g. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la curvatura media de la superficie S'

$$H' = \frac{1}{2} \frac{e'G' + g'E' - 2f'F'}{E'G' - F'^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^3 eG + \lambda^3 gE - \lambda^3 2fF}{\lambda^4 (EG - F^2)} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{\lambda} H,$$

de modo que $(H')^2 dS' = H^2 dS$, y tenemos la invarianza de W por homotecias.

Por último, vamos a verlo para las inversiones. Este caso es un poco más complejo. Sea I una inversión de centro 0 y radio r de la forma $I(p) = r^2 \frac{p}{\|p\|^2}$ y consideremos $i = I|_S$, $S' = I(S) = i(S)$. Sea (U, X) una carta de S , de forma que $(U, i \circ X)$ es una carta de S' . Vamos a llamar $X' := i \circ X$, de forma que $X'(u, v) = r^2 \frac{X(u, v)}{\|X(u, v)\|^2}$. Se tiene, entonces

$$X'_u = \frac{r^2 X_u \|X\|^2 - r^2 X \cdot 2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} = \frac{r^2}{\|X\|^2} X_u - \frac{2r^2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X,$$

y de igual forma

$$X'_v = \frac{r^2}{\|X\|^2} X_v - \frac{2r^2 \langle X, X_v \rangle}{\|X\|^4} X.$$

Por lo tanto, quedan los siguientes coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E' &= \langle X'_u, X'_u \rangle = \frac{r^4}{\|X\|^4} E - \frac{4r^4}{\|X\|^6} \langle X, X_u \rangle^2 + \frac{4r^4}{\|X\|^6} \langle X, X_u \rangle^2 \\ &= \frac{r^4}{\|X\|^4} E, \\ F' &= \frac{r^4}{\|X\|^4} F, \\ G' &= \frac{r^4}{\|X\|^4} G. \end{aligned}$$

Respecto al vector normal, vamos a demostrar que

$$N' = \frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle X - N,$$

para lo que tenemos que ver que es normal al plano tangente y que tiene módulo 1:

$$\begin{aligned} \langle N', X'_u \rangle &= \left\langle \frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle X - N, \frac{r^2}{\|X\|^2} X_u - \frac{2r^2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X \right\rangle \\ &= \frac{r^2}{\|X\|^2} \left\langle \frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle \cdot X - N, X_u - \frac{2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^2} X \right\rangle \\ &= \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[\frac{4}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle - \frac{4}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle - \langle N, X_u \rangle \right] 0 \\ &= \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[\frac{4}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle - \frac{4}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con un cálculo análogo se obtiene

$$\langle N', X'_v \rangle = 0,$$

y solo queda ver que tiene módulo 1:

$$\begin{aligned} \|N'\|^2 &= \left\langle \frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle X - N, \frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle X - N \right\rangle \\ &= \frac{4}{\|X\|^4} \langle X, N \rangle^2 \|X\|^2 - \frac{4}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle^2 + \|N\|^2 \\ &= \|N\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sabemos entonces que, efectivamente, el vector proporcionado, $N'(u, v)$, es el normal a $X'(u, v)$.

Calculamos las derivadas parciales de N' :

$$\begin{aligned} N'_u &= \left(\frac{2}{\|X\|^2} \langle X, N \rangle X - N \right)_u \\ &= \frac{2 \left(\left[\cancel{\langle X_u, N \rangle} + \langle X, N_u \rangle \right] X + \langle X, N \rangle X_u \right) \|X\|^2 - 2 \langle X, N \rangle X \cdot 2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} - N_u \\ &= \frac{2 \|X\|^2 \langle X, N \rangle \cdot X_u + \left[2 \|X\|^2 \langle X, N_u \rangle - 4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle \right] \cdot X}{\|X\|^4} - N_u \\ &= \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} X_u + \frac{2 \langle X, N_u \rangle}{\|X\|^2} X - \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X - N_u. \end{aligned}$$

De forma análoga obtenemos

$$N'_v = \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} X_v + \frac{2 \langle X, N_v \rangle}{\|X\|^2} X - \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_v \rangle}{\|X\|^4} X - N_v.$$

Estamos ya en disposición de calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e' &= - \langle N'_u, X'_u \rangle \\ &= - \left\langle \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} X_u + \frac{2 \langle X, N_u \rangle}{\|X\|^2} X - \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X - N_u, \frac{r^2}{\|X\|^2} X_u - \frac{2r^2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X \right\rangle \\ &= - \frac{r^2}{\|X\|^2} \left\langle \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} X_u + \frac{2 \langle X, N_u \rangle}{\|X\|^2} X - \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^4} X - N_u, X_u - \frac{2 \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^2} X \right\rangle \\ &= - \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} E - \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle^2}{\|X\|^4} \right] \\ &\quad - \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[\frac{2 \langle X, N_u \rangle \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^2} - \frac{4 \langle X, N_u \rangle \langle X, X_u \rangle}{\|X\|^2} \right] \\ &\quad - \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[- \frac{4 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle^2}{\|X\|^4} + \frac{8 \langle X, N \rangle \langle X, X_u \rangle^2}{\|X\|^4} \right] \\ &\quad - \frac{r^2}{\|X\|^2} \left[- \langle N_u, X_u \rangle + \frac{2 \langle X, X_u \rangle \langle N_u, X \rangle}{\|X\|^2} \right] \\ &= - \frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} E - \frac{r^2}{\|X\|^2} e. \end{aligned}$$

Mediante un cálculo análogo se puede comprobar que

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} F - \frac{r^2}{\|X\|^2} f, \quad y \\ g' &= -\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} G - \frac{r^2}{\|X\|^2} g, \end{aligned}$$

y para la curvatura media obtenemos

$$\begin{aligned} H' &= \frac{1}{2} \frac{e'G' + g'E' - 2f'F'}{E'G' - F'^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} E - \frac{r^2}{\|X\|^2} e\right) \frac{r^4}{\|X\|^4} G + \left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} G - \frac{r^2}{\|X\|^2} g\right) \frac{r^4}{\|X\|^4} E - 2 \left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} F - \frac{r^2}{\|X\|^2} f\right) \frac{r^4}{\|X\|^4} F}{\frac{r^8}{\|X\|^8} (EG - F^2)} \\ &= \frac{\|X\|^2}{r^2} \frac{1}{2} \frac{\left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} E - e\right) G + \left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} G - g\right) E - 2 \left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} F - f\right) F}{EG - F^2} \\ &= \frac{\|X\|^2}{r^2} \frac{1}{2} \frac{-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} EG - \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} GE + 2 \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} F^2}{EG - F^2} - \frac{\|X\|^2}{r^2} \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\ &= -\frac{2 \langle X, N \rangle}{r^2} - \frac{\|X\|^2}{r^2} H. \end{aligned}$$

En esta ocasión, calculamos también la curvatura de Gauss, puesto que resulta más fácil trabajar con W visto como $\int_S (H^2 - K) dS$. Queda:

$$\begin{aligned} K' &= \frac{e'g' - f'^2}{E'G' - F'^2} = \frac{\left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} E - \frac{r^2}{\|X\|^2} e\right) \left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} G - \frac{r^2}{\|X\|^2} g\right) - \left(-\frac{2r^2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^4} F - \frac{r^2}{\|X\|^2} f\right)^2}{\frac{r^8}{\|X\|^8} (EG - F^2)} \\ &= \frac{\left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} E - e\right) \left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} G - g\right) - \left(-\frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} F - f\right)^2}{\frac{r^4}{\|X\|^4} (EG - F^2)} \\ &= \frac{\|X\|^4}{r^4} \frac{\frac{4 \langle X, N \rangle^2}{\|X\|^4} EG + \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} Eg + \frac{2 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} Ge + eg - \frac{4 \langle X, N \rangle^2}{\|X\|^4} F^2 - \frac{4 \langle X, N \rangle}{\|X\|^2} Ff - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\|X\|^4}{r^4} \frac{eg - f^2}{EG - F^2} + \frac{4 \langle X, N \rangle^2}{r^4} + \frac{2 \langle X, N \rangle \|X\|^2}{r^4} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \\ &= \frac{\|X\|^4}{r^4} K + \frac{4 \langle X, N \rangle^2}{r^4} + \frac{4 \langle X, N \rangle \|X\|^2}{r^4} H. \end{aligned}$$

Además, calculamos el elemento de área

$$dS' = \sqrt{E'G' - F'^2} dudv = \frac{r^4}{\|X\|^4} \sqrt{EG - F^2} dudv = \frac{r^4}{\|X\|^4} dS.$$

De esta forma, obtenemos que

$$\begin{aligned}
(H'^2 - K') dS' &= \left[\left(-\frac{2\langle X, N \rangle}{r^2} - \frac{\|X\|^2}{r^2} H \right)^2 - \left(\frac{\|X\|^4}{r^4} K + \frac{4\langle X, N \rangle^2}{r^4} + \frac{4\langle X, N \rangle \|X\|^2}{r^4} H \right) \right] \frac{r^4}{\|X\|^4} dS \\
&= \left[\left(-2\langle X, N \rangle - \|X\|^2 H \right)^2 - \left(\|X\|^4 K + 4\langle X, N \rangle^2 + 4\langle X, N \rangle \|X\|^2 H \right) \right] \frac{1}{\|X\|^4} dS \\
&= \left[\cancel{4\langle X, N \rangle^2} + \cancel{4\langle X, N \rangle \|X\|^2 H} + \|X\|^4 H^2 - \|X\|^4 K - \cancel{4\langle X, N \rangle^2} - \cancel{4\langle X, N \rangle \|X\|^2 H} \right] \frac{1}{\|X\|^4} dS \\
&= (H^2 - K) dS.
\end{aligned}$$

Ahora bien, por el teorema de Gauss-Bonnet, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{S'} (H'^2 - K') dS' &= \int_{S'} H'^2 dS' - \int_{S'} K' dS' = \int_{S'} H'^2 dS' - 2\pi\chi(S') \\
&= W(S') - 2\pi\chi(S') \\
\int_S (H^2 - K) dS &= \int_{S'} H^2 dS - 2\pi\chi(S) = W(S) - 2\pi\chi(S).
\end{aligned}$$

Pero $\chi(S)$ es un invariante topológico y como S' es difeomorfa a S , debe ser $\chi(S') = \chi(S)$. Y entonces, tenemos la igualdad deseada:

$$W(S') = W(S).$$

□

Capítulo 4

La primera fórmula de variación

4.1. Análisis variacional del funcional de Willmore

Dado que las superficies de Willmore han sido definidas como aquellas que son puntos críticos del funcional de Willmore, es de gran interés trabajar con variaciones de las superficies y obtener la fórmula de variación que caracteriza a estos puntos, tal y como se hace para caracterizar a las superficies minimales como puntos críticos del funcional área. Es decir, dirigimos ahora nuestros esfuerzos a buscar la fórmula de Euler-Lagrange que caracteriza a las superficies de Willmore.

Sea, entonces, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, esta vez no necesariamente compacta, y consideremos una parametrización de S , (U, X) . Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto definida sobre U , tomamos la variación normal de X determinada por φ como $\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u, v, t) = \Phi_t(u, v) = X(u, v) + t \cdot \varphi(u, v) \cdot N(X(u, v)),$$

siendo $N(X(u, v))$ el normal a S en $X(u, v)$, y tomando ε lo suficientemente pequeño como para que $S_t = \Phi_t(U)$ sea una superficie regular en \mathbb{R}^3 y $\Phi_t(u, v)$ una parametrización suya para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto puede hacerse siempre gracias a que φ tiene soporte compacto y S es una superficie regular.

En esta situación, tomamos la región $R = X(\text{sop}\varphi) \subset S$, que verifica $\bar{R} \subset X(U)$. Es decir, R es un abierto conexo y relativamente compacto. Vamos a llamar además $V = \text{sop}\varphi$. Notemos que, dado que φ tiene soporte compacto, se verifica $\varphi|_{\partial V} \equiv 0$ y, más generalmente, $\Phi_t(u, v) = \Phi_0(u, v) = X(u, v)$ para todo $(u, v) \notin \text{sop}\varphi$. En consecuencia, tiene sentido definir

$$R_t := \Phi_t(V) \subset S_t.$$

Ahora, llamando H_t a la curvatura media de S_t y dS_t al elemento de área de la misma, podemos considerar la función de una variable

$$w(t) = W(R_t) = \int_{R_t} H_t^2 dS_t,$$

con $w(0) = W(R)$, y nuestro interés es calcular $w'(0)$, que nos dirá cuándo la región R es una superficie de Willmore.

Nuestro primer y principal objetivo en este capítulo es establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.1.1. Primera fórmula de variación del funcional de Willmore

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, no necesariamente compacta, y sea (U, X) una parametrización de S . Dada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con soporte compacto definida sobre U , se considera Φ la variación normal de X determinada por φ . Entonces la función $w(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ y se tiene que

$$w'(0) = \int_R \phi(\Delta H + 2H(H^2 - 2K))dS,$$

donde $R = X(\text{sop}\varphi) \subset S$ y $\phi \circ X = \varphi$.

Para demostrar este teorema, comenzamos calculando $w(t)$:

$$w(t) = \int_{R_t} H_t^2 dS_t = \iint_{V \subset \mathbb{R}^2} (H_t \circ \Phi_t)^2(u, v) \cdot \sqrt{E_t G_t - F_t^2}(u, v) dudv, \quad (4.1)$$

donde $V = X^{-1}(R) = \Phi_t^{-1}(R_t)$. Ahora bien, si consideramos $B_t(u, v) = \begin{pmatrix} E_t(u, v) & F_t(u, v) \\ F_t(u, v) & G_t(u, v) \end{pmatrix}$, entonces vemos que $\sqrt{E_t G_t - F_t^2}(u, v) = \sqrt{\det(B_t(u, v))}$, y podemos reescribir (4.1) como

$$w(t) = \iint_V (H_t \circ \Phi_t)^2(u, v) \cdot \sqrt{\det(B_t(u, v))} dudv.$$

Observamos en primer lugar que $w(t)$ es diferenciable en un entorno de $t = 0$ porque viene dada como la integral con respecto a u y v de la función

$$f(u, v, t) = (H_t \circ \Phi_t)^2(u, v) \cdot \sqrt{\det(B_t(u, v))},$$

que es derivable con respecto a t en un entorno de $t = 0$ gracias a que $\sqrt{\det(B_t(u, v))} > 0$. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_V H_t (\Phi_t(u, v))^2 \cdot \sqrt{\det(B_t(u, v))} dudv \\ &= \iint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[H_t (\Phi_t(u, v))^2 \cdot \sqrt{\det(B_t(u, v))} \right] dudv \\ &= \iint_V 2 \cdot H_t (\Phi_t(u, v)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (H_t (\Phi_t(u, v))) \sqrt{\det(B_t(u, v))} dudv \\ &\quad + \iint_V H_t (\Phi_t(u, v))^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\det(B_t(u, v))} \right) dudv. \end{aligned}$$

Particularizando en $t = 0$ queda

$$w'(0) = \iint_V 2(H \circ X)(u, v) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (H_t \circ \Phi_t)(u, v) \right) \sqrt{EG - F^2}(u, v) dudv \quad (4.2)$$

$$+ \iint_V (H \circ X)^2(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \sqrt{\det B_t(u, v)} \right) dudv. \quad (4.3)$$

Primero vamos a calcular (4.3), que es similar a la fórmula de variación del área que ya conocemos. Comenzamos calculando la derivada parcial que hay en el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\det B_t(u, v)} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\det B_t(u, v)}} \frac{\partial}{\partial t} (\det B_t(u, v)).$$

Para ello vamos a hacer uso de la fórmula de Jacobi para la derivada de un determinante:

Proposición 4.1.2. Fórmula de Jacobi^a

Dada $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de clase C^∞ , se verifica

$$\frac{d}{dt} (\det A(t)) = \text{tr} \left(\text{adj}(A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \right),$$

donde $\text{tr}(A)$ es la traza de la matriz A y $\text{adj}(A)$ su matriz de adjuntos.

^aTeorema y demostración adaptados de [MN19].

Para probar este resultado, necesitamos enunciar un lema previo:

Lema 4.1.3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(A^T B).$$

Demostración. El producto AB tiene como componentes

$$(AB)_{jk} = \sum_i A_{ji} B_{ik}.$$

Si cambiamos A por A^T , dado que es cuadrada, es equivalente a permutar los índices de sus componentes

$$(A^T B)_{jk} = \sum_i A_{ij} B_{ik}. \quad (4.4)$$

Ahora, tomando la traza a ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\text{tr}(A^T B) = \sum_j (A^T B)_{jj} = \sum_j \left[\sum_i A_{ij} B_{ij} \right] = \sum_j \sum_i A_{ij} B_{ij} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij}.$$

□

Y ahora ya podemos demostrar la proposición.

Demostración. La fórmula de Laplace para el cálculo del determinante asegura que

$$\det(A) = \sum_j A_{ij} \text{adj}^T(A)_{ij}, \quad (4.5)$$

donde la fila i escogida puede ser cualquiera.

Ahora, consideramos el determinante de A como una función de sus componentes

$$\det(A) = F(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{nn}),$$

de forma que, por la regla de la cadena, tenemos que

$$d(\det(A)) = (dF)(A_{11}, \dots, A_{nn}) = \sum_i \sum_j \frac{\partial F}{\partial A_{ij}} dA_{ij}. \quad (4.6)$$

Estamos ahora interesados en calcular $\frac{\partial F}{\partial A_{ij}}$. Para ello, nos fijamos en la parte derecha de (4.5), en la que podemos tomar el i que queramos. En particular, podemos tomarlo para que concuerde con el primer índice de $\frac{\partial}{\partial A_{ij}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} &= \frac{\partial [\sum_k A_{ik} \text{adj}^T(A)_{ik}]}{\partial A_{ij}} = \sum_k \frac{\partial [A_{ik} \text{adj}^T(A)_{ik}]}{\partial A_{ij}} = \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \cdot \text{adj}^T(A)_{ik} + A_{ik} \cdot \frac{\partial (\text{adj}^T(A)_{ik})}{\partial A_{ij}} \right] \\ &= \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \cdot \text{adj}^T(A)_{ik} + \sum_k A_{ik} \cdot \frac{\partial (\text{adj}^T(A)_{ik})}{\partial A_{ij}}, \end{aligned}$$

donde * simplemente es efectuar la derivada del producto.

Ahora bien, si un elemento de una matriz A_{ij} y un cofactor $\text{adj}^T(A)_{ik}$ del elemento A_{ik} coinciden en la misma fila (o columna), entonces el cofactor no será función de A_{ij} , porque el cofactor de A_{ik} se expresa en términos de elementos que no están en su fila (ni columna). Por tanto

$$\frac{\partial \text{adj}^T(A)_{ik}}{\partial A_{ij}} = 0,$$

ya que están ambos en la fila i . Por tanto, queda

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \cdot \text{adj}^T(A)_{ik}.$$

Pero los elementos de A son independientes entre sí, solo dependen de t , es decir

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases} = \delta_{jk},$$

siendo δ la delta de Kronecker, por lo tanto

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} = \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial A_{ij}} \cdot \text{adj}^T(A)_{ik} = \sum_k \delta_{jk} \cdot \text{adj}^T(A)_{ik} = \text{adj}^T(A)_{ij}.$$

De este modo, (4.6) queda como

$$d(\det(A)) = \sum_i \sum_j \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{ij}} dA_{ij} = \sum_i \sum_j \text{adj}^T(A)_{ij} \cdot dA_{ij}$$

que, aplicando el lema con $A_{lema} = \text{adj}^T(A)$ y $B_{lema} = dA$, queda

$$d(\det(A)) = \text{tr}(\text{adj}(A) \cdot dA).$$

□

Podemos ahora regresar a nuestros menesteres principales, y usar el resultado probado para calcular $\frac{\partial}{\partial t}(\det B_t(u, v))$, teniendo en cuenta que, para dados $(u, v) \in U$, podemos ver $B_t(u, v) = B(t)$, de forma que $B(t) = \begin{pmatrix} E_t & F_t \\ F_t & G_t \end{pmatrix}$ y $\det B(t) = E_t G_t - F_t^2$, siendo

$$E_t = E_t(u, v) = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \right\rangle,$$

$$F_t = F_t(u, v) = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\rangle,$$

$$G_t = G_t(u, v) = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\rangle.$$

De esta forma, por la fórmula de Jacobi, tenemos que

$$\frac{d}{dt} (\det B(t)) = \text{tr} (\text{adj} (B(t)) \cdot B'(t)). \quad (4.7)$$

Además, si $B(t)$ es invertible para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, que es nuestro caso pues para cada t representa la matriz de coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie regular, entonces podemos considerar su inversa, que viene dada por

$$B(t)^{-1} = \frac{1}{\det B(t)} \cdot \text{adj} (B(t)).$$

Luego

$$\text{adj} (B(t)) = \det B(t) \cdot B(t)^{-1},$$

y sustituyendo en (4.7), tenemos

$$\frac{d}{dt} (\det B(t)) = \text{tr} (\det B(t) \cdot B(t)^{-1} \cdot B'(t)) = \det B(t) \cdot \text{tr} (B(t)^{-1} \cdot B'(t)).$$

Por lo tanto es

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{\det B(t)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\det B(t)} \cdot \text{tr} (B(t)^{-1} \cdot B'(t)).$$

Ahora particularizamos para $t = 0$, obteniendo

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det B(t)} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\det B(0)} \cdot \text{tr} (B(0)^{-1} \cdot B'(0)),$$

y notamos que $B(0) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $B(0)^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ y $B'(0) = \begin{pmatrix} E'(0) & F'(0) \\ F'(0) & G'(0) \end{pmatrix}$, por lo que nuestro interés está ahora en obtener $E'(0)$, $F'(0)$ y $G'(0)$. Para ello, debemos calcular primero sus derivadas parciales respecto de t . Recordemos que

$$\Phi(u, v, t) = X(u, v) + t \cdot \varphi(u, v) \cdot N(X(u, v)),$$

luego

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot N + t \varphi \cdot \frac{\partial N}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot N + t \varphi \cdot \frac{\partial N}{\partial v},$$

donde estamos expresando $N = N(X(u, v))$ y estamos evaluando en (u, v) , pero lo omitimos por simplicidad de la notación.

Tenemos, por tanto, que

$$E(u, v, t) = E_t = \left\langle \frac{\partial \Phi_t}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \right\rangle = E + t^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + t^2 \varphi^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle + 2t \varphi \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle$$

$$= E - 2t \varphi e + t^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \varphi^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle \right].$$

Notemos en este punto que, dado que queremos diferenciar E_t y evaluarlo en $t = 0$, los términos cuadráticos en t desaparecerán, y por tanto no tenemos que prestarles atención. Por lo que podemos escribir

$$E_t = E - 2t\varphi e + t^2 \cdot \xi_E,$$

donde ξ_E representa un término constante en t , que se irá al diferenciar y evaluar en $t = 0$. De forma análoga puede verse que

$$F_t = F - 2t\varphi f + t^2 \cdot \xi_F,$$

y

$$G_t = G - 2t\varphi g + t^2 \cdot \xi_G,$$

donde, de nuevo, los términos ξ_F y ξ_G nos son irrelevantes. Diferenciamos entonces estas expresiones para obtener:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -2\varphi e + 2t \cdot \xi_E,$$

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = -2\varphi f + 2t \cdot \xi_F,$$

$$\frac{\partial G_t}{\partial t} = -2\varphi g + 2t \cdot \xi_G,$$

de forma que

$$B'(0) = \begin{pmatrix} E'(0) & F'(0) \\ F'(0) & G'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varphi e & -2\varphi f \\ -2\varphi f & -2\varphi g \end{pmatrix} = -2\varphi \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

$$B(0)^{-1} \cdot B'(0) = \frac{-2\varphi}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(B(0)^{-1} \cdot B'(0) \right) &= \frac{-2\varphi}{EG - F^2} (eG - fF - fF + gE) = -2\varphi \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \\ &= -4\varphi \cdot (H \circ X). \end{aligned}$$

Entonces, llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \sqrt{\det B(t)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\det B(0)} \cdot \text{tr} \left(B(0)^{-1} \cdot B'(0) \right) = \frac{1}{2} \sqrt{EG - F^2} \cdot (-4\varphi (H \circ X)) = \\ &= -2\varphi (H \circ X) \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned}$$

y (4.3) queda finalmente como

$$\begin{aligned} (4.3) &= \iint_V (H \circ X)^2(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \sqrt{\det B_t(u, v)} \right) dudv \\ &= \iint_V (H \circ X)^2(u, v) (-2\varphi) (H \circ X)(u, v) \cdot \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= -2 \iint_V \varphi (H \circ X)^3(u, v) \cdot \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= -2 \int_R \phi H^3 dS, \end{aligned}$$

siendo $\phi = \varphi \circ X^{-1} : R \subset S \rightarrow \mathbb{R}$.

El cálculo de (4.2) es más complejo, puesto que involucra derivar con respecto a t la curvatura media H_t . Queremos obtener

$$\iint_V 2(H \circ X)(u, v) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (H_t \circ \Phi_t)(u, v) \right) \sqrt{EG - F^2}(u, v) dudv,$$

para lo que vamos a comenzar por calcular la derivada parcial del interior. Vamos a simplificar la notación escribiendo $Z_t = Z_t \circ \Phi_t(u, v)$ siendo Z cualquier función de las que podemos considerar sobre las superficies. Por ejemplo, H_t será la curvatura media $H_t \circ \Phi_t(u, v)$. Teniendo en cuenta esta convención, se tiene

$$H_t = \frac{1}{2} \frac{e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t}{E_t G_t - F_t^2} = \frac{1}{2} \frac{e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t}{\det(B(t))}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t) \cdot \det B(0) - (eG + gE - 2fF) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\det(B(t)))}{\det(B(0))^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)}{\det(B(0))} - \frac{1}{2} \frac{(eG + gE - 2fF)}{\det(B(0))^2} \det(B(0)) \operatorname{tr}(B(0)^{-1} \cdot B'(0)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)}{\det(B(0))} - \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \cdot (H \circ X) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)}{EG - F^2} + 4\varphi(H \circ X)^2. \end{aligned}$$

Como vemos, lo único que desconocemos es $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)$, que se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t) G + e \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (G_t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t) E + g \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (E_t) \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (f_t) F - 2f \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (F_t). \end{aligned}$$

Los sumandos que involucran a e, f, g y a las derivadas parciales de la primera forma fundamental de R_t la conocemos, pues hemos calculado antes las derivadas de la primera forma fundamental de R_t . Así, vamos a calcular las derivadas de su segunda forma fundamental. Recordemos las expresiones de los vectores del plano tangente a R_t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot N + t\varphi \cdot \frac{\partial N}{\partial u}, \\ \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot N + t\varphi \cdot \frac{\partial N}{\partial v}. \end{aligned}$$

Así, podemos obtener

$$N_t = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right).$$

Primero obtenemos la dirección del vector

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N + t \varphi \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial N}{\partial v} \\ &\quad + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot N \wedge \frac{\partial X}{\partial v} + t^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot N \wedge \frac{\partial N}{\partial v} \\ &\quad + t \varphi \cdot \frac{\partial N}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} + t^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial N}{\partial u} \wedge N + t^2 \varphi^2 \frac{\partial N}{\partial u} \wedge \frac{\partial N}{\partial v}, \end{aligned}$$

y para normalizarlo, sabemos que se verifica $\left\| \frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right\|^2 = E_t G_t - F_t^2 = \det(B(t))$, por lo tanto

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{\det(B(t))}} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi_t}{\partial v} \right).$$

Ahora bien, como es $e_t = \left\langle N_t, \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right\rangle$, entonces podemos pasar directamente al cálculo de su derivada, haciendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (N_t), \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right\rangle \quad (4.8)$$

$$+ \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right) \right\rangle, \quad (4.9)$$

ya que $\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ y $N_0 = N$.

Obtengamos entonces $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} N + 2t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial N}{\partial u} + t \varphi \frac{\partial^2 N}{\partial u^2},$$

por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} N + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial N}{\partial u} + \varphi \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}.$$

Así, (4.9) es

$$\left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \varphi \left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} \right\rangle.$$

Aquí vamos a recurrir al operador de Weingarten, $A = -dN$, de manera que $\frac{\partial N}{\partial u} = -A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)$ y podemos entonces escribir

$$\left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial u^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), A \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\rangle = - \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle,$$

por lo que

$$(4.9) = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial u^2} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Ahora pasamos a obtener el resultado de (4.8), para lo que necesitamos obtener $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}}{\sqrt{\det(B(t))}}\right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right)\cdot\sqrt{\det(B(0))}-\left(\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right)\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\sqrt{\det(B(t))}\right)}{\det(B(0))} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}-\left(\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right)\frac{(-2\varphi H)\sqrt{\det(B(0))}}{\det(B(0))} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}+2\varphi H\cdot N.\end{aligned}$$

Solamente resta obtener $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial u}\wedge\frac{\partial\Phi_t}{\partial v}\right) &= \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\varphi\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial N}{\partial v} \\ &\quad +\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}+\varphi\cdot\frac{\partial N}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}$$

y notamos que el primer y tercer sumandos de la derecha son tangentes a la superficie, mientras que los sumandos segundo y cuarto de la derecha son normales. Se tiene, también, que

$$\begin{aligned}-\frac{\partial N}{\partial u} &= A\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)=a_{11}\frac{\partial X}{\partial u}+a_{21}\frac{\partial X}{\partial v}, \\ -\frac{\partial N}{\partial v} &= A\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)=a_{12}\frac{\partial X}{\partial u}+a_{22}\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}-\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial N}{\partial v} &= a_{22}\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}=a_{22}\sqrt{EG-F^2}\cdot N, \\ -\frac{\partial N}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v} &= a_{11}\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}=a_{11}\sqrt{EG-F^2}\cdot N.\end{aligned}$$

Es decir, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t) &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}-\varphi(a_{22}+a_{11})\sqrt{EG-F^2}\cdot N\right]+2\varphi H\cdot N \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}-\varphi(a_{22}+a_{11})\sqrt{EG-F^2}\cdot N\right]+2\varphi H\cdot N \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right]-\frac{2\varphi H\sqrt{EG-F^2}\cdot N}{\sqrt{EG-F^2}}+2\varphi H\cdot N \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right]-\cancel{2\varphi H\cdot N}+2\varphi H\cdot N \\ &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, se puede expresar la derivada parcial segunda de la parametrización a través de los símbolos de Christoffel, $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}=\Gamma_{11}^1\frac{\partial X}{\partial u}+\Gamma_{11}^2\frac{\partial X}{\partial v}+eN$, de modo que (4.8) es

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t),\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right\rangle=\frac{\Gamma_{11}^1\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\left\langle\frac{\partial X}{\partial u},N\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right\rangle+\Gamma_{11}^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\left\langle\frac{\partial X}{\partial v},\frac{\partial X}{\partial u}\wedge N\right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}},$$

y viendo el producto mixto $\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$ como $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle &= \det \left(\frac{\partial X}{\partial u}, N, \frac{\partial X}{\partial v} \right) = -\det \left(N, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right) \\ &= -\left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = -\left\langle \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|}, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = -\sqrt{EG - F^2} \\ &= -\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|. \end{aligned}$$

De igual forma $\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N \rangle = -\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|$, por tanto queda

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (N_t), \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right\rangle = -\left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

En definitiva, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Debemos ahora obtener $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t)$ y $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (f_t)$, para poder ensamblar los resultados y completar el desarrollo de la primera fórmula de variación del funcional de Willmore. Para obtener estos valores, muchos resultados obtenidos hasta ahora nos van a ser útiles. Comencemos por $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t)$.

Dado que $g_t = \left\langle N_t, \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right\rangle$, entonces queremos conocer

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (N_t), \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right\rangle \quad (4.10)$$

$$+ \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right) \right\rangle. \quad (4.11)$$

Para dar con (4.11), calculamos primero $\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2}$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} N + 2t \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial N}{\partial v} + t \varphi \frac{\partial^2 N}{\partial v^2},$$

y la diferenciamos respecto de t , evaluando en $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} N + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial N}{\partial v} + \varphi \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}.$$

Luego

$$(4.11) = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \varphi \left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} \right\rangle,$$

y usando, como antes, el operador de Weingarten $A = -dN$, obtenemos que

$$\left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial v^2} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = -\left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

De esta manera se llega a

$$(4.11) = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial v^2} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Para dar con (4.10), recuperamos $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot N \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}$ y usamos que $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + gN$, obteniendo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t), \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right\rangle &= \frac{\Gamma_{22}^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N \right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} \\ &= - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

y tenemos, finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(g_t) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right).$$

Obtengamos, finalmente, $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(f_t)$. Dado que $f_t = \left\langle N_t, \frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right\rangle$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(f_t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t), \frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right\rangle \quad (4.12)$$

$$+ \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right) \right\rangle. \quad (4.13)$$

Calculemos $\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v}$:

$$\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} + t \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} N + 2t \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial N}{\partial u} + t\varphi \frac{\partial^2 N}{\partial u\partial v},$$

diferenciando respecto de t y evaluando en $t=0$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} N + 2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial N}{\partial u} + \varphi \frac{\partial^2 N}{\partial u\partial v}.$$

Por lo tanto tenemos

$$(4.13) = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \varphi \left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial u\partial v} \right\rangle.$$

De nuevo, usando el operador $A = -dN$ tenemos que

$$\left\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial u\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle,$$

luego

$$(4.13) = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left(\frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Solo resta en este punto obtener (4.12), para lo que volvemos a utilizar el valor de $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N + \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot N \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}$ y también que $\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + fN$, de forma que obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(N_t), \frac{\partial^2\Phi_t}{\partial u\partial v} \right\rangle &= \frac{\Gamma_{12}^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge N \right\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} \\ &= - \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

y es, por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (f_t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

En este punto, ya tenemos todos los ingredientes que buscábamos. Podemos ya obtener el valor de $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)$, cuya expresión recordemos que era

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t) G + e \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (G_t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t) E + g \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (E_t) \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (f_t) F - 2f \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (F_t). \end{aligned}$$

Sustituyendo aquí todo lo que ya conocemos, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t) &= G \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] \\ &+ e [-2\varphi g] \\ &+ E \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] \\ &+ g [-2\varphi e] \\ &- 2F \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \varphi \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] \\ &- 2f (-2\varphi f), \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (e_t G_t + g_t E_t - 2f_t F_t)}{EG - F^2} + 4\varphi(H \circ X)^2.$$

De esta forma, llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t &= \frac{1}{2} \frac{\varphi}{EG - F^2} \left[-G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + 2F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{G}{EG - F^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{-2F}{EG - F^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{E}{EG - F^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) \\ &+ 4\varphi(H \circ X)^2 - 2\varphi \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión en coordenadas del laplaciano (véase la Proposición 1.2.17), observamos en primer lugar que los tres sumandos intermedios son iguales a $\frac{1}{2} \Delta \phi \circ X$, donde recordamos aquí que $\phi \circ X = \varphi$. Por otra parte, el último sumando no es más que $-2\varphi(K \circ X)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t &= \frac{1}{2} \frac{\varphi}{EG - F^2} \left[-G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + 2F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right] \\ &+ \frac{1}{2} \Delta \phi \circ X + 4\varphi(H \circ X)^2 - 2\varphi(K \circ X). \end{aligned}$$

Vamos a calcular ahora el primer término, que veremos que da $-\frac{1}{2}\varphi\text{tr}(A^2)\circ X$. Para ello, sea $(b_{ij}) = A^2$, de forma que $\text{tr}(A^2) = b_{11} + b_{12}$ y se verifica

$$\begin{aligned} A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right) &= b_{11} \frac{\partial X}{\partial u} + b_{21} \frac{\partial X}{\partial v}, \\ A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) &= b_{12} \frac{\partial X}{\partial u} + b_{22} \frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle &= b_{11}E + b_{21}F, \\ \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle &= b_{11}F + b_{21}G, \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\ \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix},$$

y tenemos que

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\ \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix},$$

luego

$$b_{11} = \frac{G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle}{EG - F^2}.$$

De manera análoga se obtiene que

$$b_{22} = \frac{E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle}{EG - F^2},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2) \circ X &= b_{11} + b_{22} \\ &= \frac{G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle - F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle}{EG - F^2} \\ &= \frac{G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - 2F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Es decir, que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{-\varphi}{EG - F^2} \left[G \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + E \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle - 2F \left\langle A^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right), \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \right] \\ &= -\frac{1}{2} \varphi \text{tr}(A^2) \circ X, \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t = \frac{1}{2} \Delta \phi \circ X + 4\varphi(H \circ X)^2 - 2\varphi(K \circ X) - \frac{1}{2} \varphi \text{tr}(A^2) \circ X.$$

Si recordamos ahora que $\text{tr}(A^2) = 4H^2 - 2K$ (véase la Proposición 1.1.8), entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t &= \Delta \phi \circ X + 8\varphi(H \circ X)^2 - 4\varphi(K \circ X) - 4\varphi(H \circ X)^2 + 2\varphi(K \circ X) \\ &= \Delta \phi \circ X + \varphi(4H^2 - 2K) \circ X, \end{aligned}$$

por lo que (4.2) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(4.2) &= \iint_V (H \circ X) \cdot 2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} H_t \sqrt{EG - F^2} dudv \\
&= \iint_V (H \circ X) [\Delta\phi \circ X + \varphi(4H^2 - 2K) \circ X] \sqrt{EG - F^2} dudv \\
&= \int_R H (\Delta\phi + 2\phi(2H^2 - K)) dS.
\end{aligned}$$

Juntando ahora las dos expresiones obtenidas para (4.2) y (4.3), obtenemos que

$$\begin{aligned}
w'(0) &= \int_R H (\Delta\phi + 2\phi(2H^2 - K)) dS - 2 \int_R \phi H^3 dS \\
&= \int_R H \Delta\phi dS + \int_R \phi \cdot 2H(H^2 - 2K) dS.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema de la divergencia en la región R y teniendo en cuenta que $\phi|_{\partial R} \equiv 0$ se tiene que

$$\int_R H \Delta\phi dS = \int_R \Delta H \phi dS,$$

por lo que se tiene que

$$w'(0) = \int_R \phi (\Delta H + 2H(H^2 - 2K)) dS.$$

Con esto concluye la demostración del Teorema 4.1.1. Como consecuencia de dicho teorema podemos establecer la ecuación de Euler-Lagrange de las superficies de Willmore.

Teorema 4.1.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, no necesariamente compacta. S es una superficie de Willmore, en el sentido de que S es un punto crítico del funcional de Willmore, si y solo verifica la ecuación*

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0. \quad (4.14)$$

Demostración. Supongamos que S es una superficie de Willmore. Esto significa que para toda parametrización (U, X) de S y para toda variación normal de X determinada por cualquier función de soporte compacto φ definida sobre U se tiene que $w'(0) = 0$. Supongamos entonces que $\Delta H + 2H(H^2 - K) \neq 0$. Entonces existirá un punto $p_0 \in S$ donde $(\Delta H + 2H(H^2 - K))(p_0) \neq 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(\Delta H + 2H(H^2 - K))(p_0) > 0$ y, por continuidad, existirá un entorno V de p_0 en S donde $\Delta H + 2H(H^2 - K) > 0$. Pero entonces, tomando si es necesario un entorno más pequeño de p_0 y multiplicando la función positiva $\Delta H + 2H(H^2 - K)$ por una función meseta apropiada f , podemos elegir $\phi = f(\Delta H + 2H(H^2 - K))$ (equivalentemente, $\varphi = f(\Delta H + 2H(H^2 - K)) \circ X$) y se tiene que

$$w'(0) = \int_R f(\Delta H + 2H(H^2 - 2K))^2 dS \geq \int_{\text{sopf}} f(\Delta H + 2H(H^2 - 2K))^2 dS > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe ser $\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$.

Recíprocamente, por la fórmula obtenida en el Teorema 4.1.1 resulta inmediato comprobar que si $\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$ entonces S es un punto crítico del funcional de Willmore \square

Hemos llegado, entonces, a la ecuación de Euler-Lagrange para las superficies de Willmore

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0, \quad (4.15)$$

que podemos tomar, a partir de ahora, como la propiedad que redefine a las superficies de Willmore. Usando esta nueva definición, no necesitamos exigir que la superficie sea compacta, o ni siquiera orientable.

Ejemplo 4.1.5. Las superficies totalmente umbilicales son superficies de Willmore. Notemos que el ser totalmente umbilicales implica que $H^2 - K = 0$. Pero además sabemos que estas superficies solo pueden ser trozos de plano o de esfera, por lo que H es constante y, en consecuencia $\Delta H \equiv 0$.

Obsérvese que los planos son superficies de Willmore en esta nueva definición, pero no con la definición original, pues no son compactos. Aún más, toda superficie minimal de \mathbb{R}^3 , y por lo tanto necesariamente no compacta, es una superficie de Willmore, ya que al ser $H \equiv 0$ se tiene trivialmente que $\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$.

Por otra parte, los trozos abiertos de esferas se pueden caracterizar como las únicas superficies de Willmore en \mathbb{R}^3 con curvatura media constante $H \neq 0$. En efecto, si S es una superficie de Willmore con curvatura media constante $H \neq 0$, se tiene que $\Delta H = 0$ y por lo tanto la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a $H(H^2 - K) = 0$. Pero como H es una constante no nula, debe ser entonces $H^2 - K \equiv 0$ y S es, por tanto, totalmente umbilical. Finalmente, no pudiendo ser $H = 0$, el Teorema 1.2.4 nos asegura entonces que S debe ser un trozo de una esfera.

Capítulo 5

Conclusión

Tras visitar los principales resultados básicos sobre las superficies de Willmore, adaptados a la notación moderna de la geometría diferencial, el lector puede hacerse una idea de la enorme profundidad del asunto. Más aún si se tiene en cuenta que en esta memoria nos hemos restringido al espacio tridimensional, lo cual supone, evidentemente, un recorte de la información a la que se puede acceder desde una perspectiva más general. No obstante, espero que el estudiante interesado en geometría diferencial aprecie el trabajo aquí realizado.

Considero que el objetivo principal del que partíamos al realizar esta memoria, o sea, hacer accesible a los estudiantes de grado el tema del funcional de Willmore, ha sido cumplido con creces. Esto lo creo así porque hemos sido capaces de demostrar sin conceptualizaciones muy abstractas muchos resultados que, aunque sencillos para aquellos con profundos conocimientos de geometría diferencial, son complejos para un estudiante de matemáticas. Además, hemos podido hacer esto para todos los resultados que pueden considerarse básicos en este tema, a partir de los cuales se desarrolla toda la teoría de las superficies de Willmore.

Finalmente, aquellos que quieran profundizar en el material aquí expuesto, son remitidos a las diferentes fuentes bibliográficas a las que se ha referenciado en distintas ocasiones, cuyo material debería ser, tras la comprensión de esta memoria, descifrable con relativa facilidad. Por supuesto, las mencionadas fuentes no son las únicas a las que se puede acceder. Como ya comentábamos en la introducción, la literatura sobre el funcional de Willmore es muy amplia y profunda.

Bibliografía

- [Alí06] Luis J. Alías. *Análisis geométrico y geometría global de superficies: Una introducción elemental*. IMPA, Ro de Janeiro, 2006. ISBN: 85-244-0247-4.
- [Bla29] Wilhelm J. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie III*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1929. 488 págs. ISBN: 3642505139.
- [Che73] Bang-yen Chen. «An invariant of conformal mappings». En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 40.2 (1973), págs. 563-564. DOI: [10.1090/s0002-9939-1973-0320956-9](https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1973-0320956-9).
- [Ges20] Luis Gestoso Muñoz. *Algunas aplicaciones del cálculo intrínseco al estudio de la geometría global de superficies*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2020.
- [HP19] María de los Ángeles Hernández Cifre y Jose Antonio Pastor González. *Un curso de geometría diferencial*. CSIC. Ediciones Doce Calles, Madrid, 2019. ISBN: 978-84-00-10545-7.
- [Hor71] Roger A. Horn. «On Fenchel's theorem». En: *Amer. Math. Monthly* 78.4 (1971), págs. 380-381. DOI: [10.2307/2316904](https://doi.org/10.2307/2316904).
- [Koe21] Thomas Koerber. «The area preserving Willmore flow and local maximizers of the Hawking mass in asymptotically Schwarzschild manifolds». En: *J. Geom. Anal.* 31.4 (2021), págs. 3455-3497. DOI: [10.1007/s12220-020-00401-6](https://doi.org/10.1007/s12220-020-00401-6).
- [LP88] N.J. Lott y D.I. Pullin. «Method for fairing B-spline surfaces». En: *Computer-Aided Design* 20.10 (1988), págs. 597-600. ISSN: 0010-4485. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(88\)90206-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(88)90206-0).
- [MN19] Jan R. Magnus y Heinz Neudecker. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2019. xviii+479 págs. ISBN: 9781119541202.
- [MN14a] Fernando C. Marques y André Neves. «Min-Max theory and the Willmore conjecture». En: *Ann. of Math. (2)* 179.2 (2014), págs. 683-782.
- [MN14b] Fernando C. Marques y André Neves. «The Willmore conjecture». En: *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 116.4 (2014), págs. 201-222. DOI: [10.1365/s13291-014-0104-8](https://doi.org/10.1365/s13291-014-0104-8).
- [Mar16] Margarita Martínez Gallardo. *El funcional de Willmore*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2016.
- [MR98] Sebastián Montiel y Antonio Ros. *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, Granada, 1998. ISBN: 978-84-8254-991-0.
- [ONe83] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*. Pure and applied mathematics 103. New York: Academic Press, 1983. ISBN: 978-0-12-526740-3.
- [Per03] Joel Persson. *Willmore surfaces*. Master's Thesis, Lund University, 2003.
- [Soe11] Mirjam Soeten. *Conformal maps and the theorem of Liouville*. Bachelor's Thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2011.
- [TA13] Magdalena Toda y Bhagya Athukorallage. «Geometry of biological membranes and Willmore energy». En: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1558. 2013, págs. 883-886. DOI: [10.1063/1.4825638](https://doi.org/10.1063/1.4825638).

-
- [Wil65] Thomas J. Willmore. «Note on embedded surfaces». En: *An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. (N.S.)* 11B (1965), págs. 493-496.
- [Wil96] Thomas J. Willmore. *Riemannian geometry*. Oxford University Press, New York, 1996. ISBN: 0198514921.

Apéndice A

Programa en Matlab para graficar un toro generalizado

El código utilizado para la generación de la Figura 2.1 es el siguiente:

```
1 %Definimos la curva
2
3 syms t
4 xt = cos(t)
5 yt = sin(t)
6 zt = cos(2*t)
7
8 Ct = [xt, yt, zt]
9
10 %Obtenemos el vector tangente unitario
11
12 xtdt = diff(xt, t)
13 ytdt = diff(yt, t)
14 ztdt = diff(zt, t)
15
16 Ctdt = [xtdt, ytdt, ztdt]
17
18 modD = sqrt(xtdt^2+ytdt^2+ztdt^2)
19
20 T1 = xtdt/modD
21 T2 = ytdt/modD
22 T3 = ztdt/modD
23
24 T = [T1, T2, T3]
25
26 %Obtenemos el normal
27
28 T1dt = diff(T1, t)
29 T2dt = diff(T2, t)
30 T3dt = diff(T3, t)
31
32 modD2 = sqrt(T1dt^2+T2dt^2+T3dt^2)
33
34 N1 = T1dt/modD2
35 N2 = T2dt/modD2
36 N3 = T3dt/modD2
```

```
37
38 N = [N1, N2, N3]
39
40 %Obtenemos el binormal
41
42 B = [T2*N3-T3*N2, T3*N1-T1*N3, T1*N2-T2*N1]
43
44 %Definimos el toro generalizado, con un radio apropiado (elegido arbitrariamente) ...
    para una visualización correcta
45
46 syms s
47 r = 0.2
48 Toro_t_s = Ct + r*cos(s)*N + r*sin(s)*B
49
50 %Por último, lo dibujamos. Para ello, primero dibujamos la curva y, ...
    posteriormente, particionamos el intervalo [0,2pi] con una densidad ...
    suficiente para poder visualizar la superficie, y para cada t, dibujamos la ...
    circunferencia de radio alrededor del punto C(t).
51
52 fplot3(Ct(1), Ct(2), Ct(3), [0, 2*pi], "Color", "b")
53 hold on
54 for i = 0:pi/128:2*pi
55     circ = subs(Toro_t_s, t, i);
56     d = dist(subs(circ, s, 0),subs(circ, s, pi));
57     if(abs(d-2*r)<1e-1)
58         fplot3(circ(1), circ(2), circ(3), [0, 2*pi], "Color", "r");
59     end
60 end
61 hold off
62
63 %Nótese que se comprueba que la circunferencia sea correcta midiendo su diámetro, ...
    para evitar posibles problemas de mal condicionamiento.
64
65 %Funciones auxiliares
66 function d = dist(V,U)
67     d = sqrt((V(1)-U(1))^2+(V(2)-U(2))^2+(V(3)-U(3))^2);
68 end
69
70 function e = esc(V,U)
71     e = V(1)*U(1)+V(2)*U(2)+V(3)*U(3);
72 end
```